EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* …001**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2,-5,3)$ și este paralelă cu dreapta $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$.

(4p) **b)** Să se determine valoarea numărului $\sin^2 2007\pi+\cos^2 2007\pi$.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale hiperbolei $2x^2-5y^2-8=0$ cu dreapta $5y=x$

(4p) **d)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ şi $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

(2p) **e)** Să se determine partea reală a numărului complex $\frac{2+3i}{3-2i}$.

(2p) **f)** Să se determine aria unui triunghi având lungimile a două laturi de 4 şi 5, iar unghiul dintre ele de 30°.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine suma coeficienților polinomului $(5X-4)^3$.

(3p) **b)** Să se determine câte numere de 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele 2,3,4,5.

(3p) **c)** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-3$.
Să se calculeze numărul $f(-3)\cdot f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)$.

(3p) **d)** Să se determine partea întreagă a numărului $\sqrt{42}$.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element *n* din mulțimea $\{0,1,2,3\}$ să verifice relația $3^n+5^n=2^n+6^n$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

(3p) **a)** Să se arate că $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-0,5}{x-1}$.

(3p) **d)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între axa *Ox*, graficul funcției *f* şi dreptele $x=1$ şi $x=2$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi şirul $(F_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, cu $F_0=0$, $F_1=1$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze F_2 şi F_3.

(4p) **c)** Să se arate că $A^2=A+I_2$ şi $A^{n+1}=A^n+A^{n-1}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Utilizând relaţia $\det(A^n)=(\det A)^n$, să se arate că $F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând egalitatea $A^n\cdot A^m=A^{m+n}$, să se arate că

$F_{n+m}=F_{n+1}\cdot F_m+F_n\cdot F_{m-1}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}$, $\forall\, m\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{F_k\cdot F_{k+1}}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră numerele reale $a, b,$ $0<a<b$ şi funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$,

$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, $g(x)=ln(1+x)-x$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $g'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $g(x)<0$, $\forall\, x\in(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x)<1$, $\forall\, x\in(0,\infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx<\frac{1}{3}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}f(x)$ şi $\lim_{x\to\infty}f(x)$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}f(t)\,dt$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}f(t)\,dt$.