EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….002**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(-2,\ 4)$ și $B(2,\ 0)$ să aparțină dreptei de ecuație $y = ax + b$.

(4p) **b)** Dacă punctul M este simetricul punctului $A(-2,\ 4)$ față de punctul $B(2,\ 0)$**,** să se determine coordonatele punctului M.

(4p) **c)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $O(0, 0)$, $A(-2,\ 4)$ și $B(2,\ 0)$.

(4p) **d)** Să se determine semnul numărului $\cos 3$.

(2p) **e)** Să se calculeze tangenta unghiului determinat de diagonala unui cub cu o față laterală a sa.

(2p) **f)** Să se arate că punctele $C(1,\ 1\ ,1)$, $D(0,\ 1,\ 1)$, $E(1, 0,\ 1)$, $F(1,\ 1,\ 0)$ sunt necoplanare.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $A = \{0, 3, 6, ..., 30\}$.

(3p) **a)** Să se calculeze numărul elementelor mulțimii A .

(3p) **b)** Să se determine numărul de submulțimi ale mulțimii A care au trei elemente .

(3p) **c)** Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea A să fie număr prim .

(3p) **d)** Să se calculeze suma elementelor mulțimii A.

(3p) **e)** Să se determine câte submulțimi ale mulțimii A au 2 elemente și nu îl conțin pe 0.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

(3p) **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,\ \infty)$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este convexă pe intervalul $(0,\ \infty)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} f'(x)\, dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincte și $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ arbitrare, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$.

Definim polinoamele $w_1 = \frac{(X-a_2)(X-a_3)\ldots(X-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$, $w_2 = \frac{(X-a_1)(X-a_3)\ldots(X-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}$, …, $w_n = \frac{(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}$ și $L_n = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_n w_n$.

(4p) **a)** Să se verifice că $w_i(a_j) = 0$, $\forall i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $w_1(a_1) = w_2(a_2) = \ldots = w_n(a_n) = 1$.

(4p) **c)** Să se verifice că grad (w_1) = … = grad (w_n) = $n-1$.

(2p) **d)** Să se arate că polinomul L_n are gradul cel mult $n-1$ și $L_n(a_k) = b_k$, $\forall\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $f \in \mathbf{R}[X]$, grad$(f) \leq n-1$ și $f(a_k) = b_k$, $\forall\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $f = L_n$.

(2p) **f)** Să se arate că $(17a_1+11)w_1 + (17a_2+11)w_2 + \ldots + (17a_n+11)w_n = 17X + 11$.

(2p) **g)** Să se calculeze $a_1^2 \cdot w_1(1) + a_2^2 \cdot w_2(1) + \ldots + a_n^2 \cdot w_n(1)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră numerele strict pozitive $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funcția $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \int_a^b t^x\,dt$

și funcția $g : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \ln x - 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$.

(4p) **a)** Să se arate că $(x+1) \cdot f(x) = b^{x+1} - a^{x+1}$, pentru orice $x \in [1, \infty)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1, \infty)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $g'(x)$, $x \in [1, \infty)$.

(2p) **d)** Dacă $0 < a < b < 1$, să se calculeze $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

(2p) **e)** Să se arate că $g(x) > 0$, $\forall x \in (1, \infty)$.

(2p) **f)** Să se demonstreze inegalitatea $2 \cdot \frac{b-a}{b+a} < \ln \frac{b}{a}$, pentru orice $0 < a < b$.

(2p) **g)** Să se arate că $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \ldots + \frac{2}{2n+1} < \ln(n+1)$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.