EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.009**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $(2+3i)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $E(1,2)$ la dreapta $x+y+5=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $x^2-2y^2=2$ în punctul $P(2,1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(-1,2,1)$, $M(-2,3,1)$ și $N(-3,4,1)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,2,2)$, $B(2,2,1)$, $C(2,1,2)$ și $D(1,2,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(3+2i)^3=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze expresia $C_5^0-C_5^1+C_5^2+C_5^3$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $x\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $x^2-x=6$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(2)+g(1)+g(0)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+9^x=12$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f=X^3-X^2-X-1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+arctg\,x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției f.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M_2(\mathbf{Z_2})$, submulțimea $H = \{X \in M_2(\mathbf{Z_2}) \mid X^2 = X\}$ şi matricele

$O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $O_2 \in H$ şi $I_2 \in H$.

(4p) **b)** Să se verifice că $B \notin H$.

(4p) **c)** Să se găsească două matrice $P, Q \in H$, cu proprietatea $P + Q \notin H$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $U \in H$ este o matrice inversabilă , atunci $U = I_2$.

(2p) **e)** Să se determine numărul de elemente din mulțimea $M_2(\mathbf{Z_2})$.

(2p) **f)** Să se determine numărul de elemente din mulțimea H.

(2p) **g)** Să se arate că orice matrice din mulțimea $M_2(\mathbf{Z_2})$ se scrie ca o sumă finită de elemente din mulțimea H.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, funcțiile $f_k : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $\forall\, k \in \mathbf{N}$ şi $g : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, definite prin $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ şi $f_0(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n-1}$,

$\forall\, x \in [0,\infty)$ şi $f_{k+1}(x) = \int_0^x f_k(t)\,dt$, $\forall\, x \in [0,\infty)$, $\forall\, k \in \mathbf{N}$.

Notăm prin $g^{(k)}(x)$, derivata de ordinul k a funcției g calculată în punctul x .

(4p) **a)** Să se calculeze $g'(x)$, $x \in [0,\infty)$.

(2p) **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că ,

$$g^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-k},\ \forall\, k \in \mathbf{N}^*,\ \forall\, x \in [0,\infty).$$

(4p) **c)** Să se verifice că $g^{(n+1)}(t) = f_0(t)$, $\forall\, t \in [0,\infty)$.

(4p) **d)** Integrând relația de la punctul **c),** să se arate că $f_1(x) = g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)$, $\forall\, x \in [0,\infty)$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\forall x \in [0,\infty)$ avem egalitatea

$$f_{n+1}(x) = g(x) - \left(g(0) + \frac{x}{1!}g^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}g^{(2)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}g^{(n)}(0)\right).$$

(2p) **f)** Să se arate că $0 \leq |f_k(x)| \leq \frac{x^k}{k!}\left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)\right|$, $\forall\, k \in \mathbf{N}$, $\forall\, x \in (0,1]$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(g(0) + \frac{x}{1!}g^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}g^{(2)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}g^{(n)}(0)\right) = g(x)$, $\forall\, x \in [0,1]$.