EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.011**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocaţională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,4)$, $C(3,5)$ şi $O(0,0)$.

(4p) **a)** Să se calculeze lungimile segmentelor (AB), (BC) şi (AC).

(4p) **b)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(1,3)$ şi $B(2,4)$ să se afle pe dreapta $y = ax + b$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că punctele $A(1,3)$, $B(2,4)$, $C(3,5)$ sunt coliniare.

(4p) **d)** Să se calculeze coordonatele proiecţiei punctului $A(1,3)$ pe axa Ox.

(2p) **e)** Dacă $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin a = \frac{5}{13}$, să se calculeze $\cos a$.

(2p) **f)** Să se calculeze în mulţimea numerelor complexe produsul $i \cdot i^2 \cdot \ldots \cdot i^{10}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ ecuaţia: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\log_2 8$.

(3p) **c)** Să se determine cu câte cifre de 0 se termină numărul 10!.

(3p) **d)** Să se calculeze suma $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n din mulţimea $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, acesta să satisfacă relaţia $n^2 - 4 \le 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

(3p) **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \int_0^n f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, se consideră funcția $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = (1+z)^n$.

Sunt cunoscute formulele $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$ şi $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(i) = \left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots\right) + i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots\right)$.

(4p) **c)** Să se verifice că $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(i) = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

(2p) **e)** Să se arate că $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$.

(2p) **f)** Să se arate că $f(\cos t + i\sin t) = 2^n \cos^n \frac{t}{2}\left(\cos\frac{nt}{2} + i\sin\frac{nt}{2}\right)$, $t \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kt = 2^n \cos^n \frac{t}{2}\cos\frac{nt}{2}$, $t \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $e_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, unde $0! = 1$ şi pentru orice şir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n \in \{-1, 1\}$, $n \in \mathbf{N}$, definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prin $x_n = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

(4p) **a)** Să se arate că: $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-2)! \cdot k}$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$.

(4p) **b)** Să se arate că $\frac{1}{0! \cdot 2} + \frac{1}{1! \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)! \cdot n} = 1 - \frac{1}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

(4p) **c)** Să se arate că şirul $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton şi mărginit .

(2p) **d)** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, numărul x_n nu este număr întreg.

(2p) **e)** Să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, există $y_n, z_n \in [0, \infty)$, astfel încât $x_n = y_n - z_n$.

(2p) **f)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent.

(2p) **g)** Să se arate că limita şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este număr irațional.