EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….017**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\cos 2 + i\sin 2$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,\ 2)$ la punctul $C(0, 1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze coordonatele punctului de intersecție dintre cercul $x^2 + y^2 = 25$ și dreapta $3x + 4y - 25 = 0$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(4, 1)$, $M(6, 3)$ și $N(7, 4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(2, 4, 0)$ și $D(1,2,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se verifice identitatea $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz\right)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se arate că, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$, unde $x, y, z \in \mathbf{R}$, atunci $x = y = z$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 9^x + 49^x = 6^x + 14^x + 21^x$.

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^3 = \hat{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^4 - X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot \sin x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este monoton crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru fiecare matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ notăm cu $S(A)$ suma elementelor sale, cu $A^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ transpusa ei şi cu $\det A$ determinantul matricei *A*.

(4p) **a)** Să se arate că $S(A^T)=S(A)=a+b+c+d$.

(4p) **b)** Să se arate că $S(x\cdot P+y\cdot Q)=x\cdot S(P)+y\cdot S(Q),\ \forall\ P,Q\in M_2(\mathbf{R}),\ \forall\ x,y\in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $S(A\cdot A^T)=(a+c)^2+(b+d)^2$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $S(A\cdot A^T)=0$, atunci $\det A=0$.

(2p) **e)** Să se arate că $\forall\ x\in \mathbf{R},\ \forall\ P,Q\in M_2(\mathbf{R})$,

$$S((P+xQ)\cdot(P^T+x\cdot Q^T))=S(P\cdot P^T)+x(S(P\cdot Q^T)+S(Q\cdot P^T))+x^2\cdot S(Q\cdot Q^T).$$

(2p) **f)** Să se arate că, dacă $P,Q\in M_2(\mathbf{R})$ şi $\det Q\neq 0$ atunci funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=S((P+xQ)(P^T+xQ^T))$ are gradul egal cu 2.

(2p) **g)** Să se arate că $S(P\cdot P^T)\cdot S(Q\cdot Q^T)\geq S(P\cdot Q^T)\cdot S(Q\cdot P^T),\ \forall\ P,Q\in M_2(\mathbf{R})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru $n\in\mathbf{N}$ se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ definite prin $f_n(x)=x^n+\ln x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_n'(x),\ \ x>0$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f_n este monoton crescătoare, $\forall n\in\mathbf{N}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția f_n este bijectivă ,$\forall n\in\mathbf{N}$.

(2p) **e)** Să se arate că $\forall\ n\in\mathbf{N}$, ecuația $f_n(x)=0$ are o unică soluție $x_n\in(0,1)$.

(2p) **f)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător .

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.