EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….019**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta de ecuație $4x-3y+3=0$.

(4p) **b)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $A(1,3,5)$, $B(5,3,1)$.

(4p) **c)** Să se determine $a\in\mathbf{R}$, astfel încât punctul $M(2,a)$ să aparțină dreptei de ecuație $2x-3y+5=0$.

(4p) **d)** Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta $y=x$ și hiperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$.

(2p) **e)** Să se calculeze $tg\frac{\pi}{4}$.

(2p) **f)** Să se calculeze suma de numere complexe $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\log_2 4$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4}\cdot\hat{5}\cdot\hat{6}\cdot\hat{7}$ în $\mathbf{Z}_8$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}$.

(3p) **d)** Să se determine probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1,2,3,...,8\}$ să fie soluție a inecuației $n^2+5n-6<0$.

(3p) **e)** Să se rezolve ecuația $2^{x^2}=16$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x>0$.

(3p) **b)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[e,\infty)$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **d)** Să se determine asimptota orizontală la graficul funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$ şi polinomul $f = X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + ... + a_1 \cdot X - 1 \in \mathbf{R}[X]$ ale cărui rădăcini $z_1, z_2, ... z_n \in \mathbf{C}$ verifică $|z_1| \geq 1,\ |z_2| \geq 1,\ \ldots,\ |z_n| \geq 1$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(0)$ şi $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$.

(4p) **b)** Să se arate că $|z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_n| = 1$.

(4p) **c)** Să se arate că polinomul f are cel puţin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $f(1) = 0$.

(2p) **f)** Dacă n este par, să se arate că polinomul $X^2 - 1$ îl divide pe f.

(2p) **g)** Dacă $a_{n-1} = -n$, să se arate că $f = (X-1)^n$ şi n este impar.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$ şi $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = |f(x) - x|$,

unde $\left[x + \frac{1}{2}\right]$ înseamnă partea întreagă a numărului real $x + \frac{1}{2}$.

(4p) **a)** Să se arate că $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ şi $g(x) = |x|$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

(4p) **b)** Să se arate că funcţia g este periodică de perioadă $T = 1$ şi este continuă pe $\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)\, dx$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $\int_{k-1}^{k} g(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $\int_0^1 g(x) \cdot g(nx)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(x) \cdot g(nx)\, dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, există $x_k', x_k'' \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, astfel încât

$$g(x_k') \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\, dx \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(x) \cdot g(nx)\, dx \leq g(x_k'') \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\, dx.$$

(2p) Folosind faptul că pentru $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ şi orice $y_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, avem

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(y_k) = \int_0^1 g(x)\, dx$, să se arate că $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g(x) \cdot g(nx)\, dx = \left(\int_0^1 g(x)\, dx \right)^2$.