EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta ….020

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(3, 4)$ şi $C(4, -5)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$.

(4p) **d)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 25$ în punctul $P(3, -4)$.

(2p) **e)** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB = 2$, $AC = 2$ şi $m(\angle BAC) = \frac{\pi}{6}$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $a + bi = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze elementul $\hat{2}^{2007}$ în $(\mathrm{Z}_3, \cdot)$.

(3p) **b)** Să se calculeze expresia $E = C_{12}^3 - C_{12}^9$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_2 x = \log_4 x$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x = 4^x$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n! < n^3$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x - 10$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7n+3}{8n-2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $a,b,c,d\in\mathbf{C}$ iar în mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}y&-b\\0&x\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}x&0\\c&y\end{pmatrix}$, unde $x, y\in\mathbf{C}$. Notăm prin $tr(A)=a+d$ urma matricei A.

(4p) **a)** Să se calculeze $tr(I_2)$.

(4p) **b)** Să se arate că $tr(X+Y)=tr(X)+tr(Y)$ și $tr(XY)=tr(YX)$, $\forall\, X,Y\in M_2(\mathbf{C})$.

(4p) **c)** Să se calculeze $UV-VU$, unde $U=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $D=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, atunci se pot alege $x, y\in\mathbf{C}$ astfel încât matricele B şi C să verifice relația $D=C-B$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $b\neq 0$, $c\neq 0$, atunci matricea $S=\begin{pmatrix}0&-\frac{b}{c}\\1&0\end{pmatrix}$ este inversabilă şi $S^{-1}BS=C$.

(2p) **f)** Să se arate că nu există $X,Y\in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $I_2=XY-YX$.

(2p) **g)** Să se arate că pentru o matrice oarecare $W=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{C})$, cu $bc\neq 0$, există matricele $X,Y\in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $W=XY-YX$ dacă şi numai dacă $tr(W)=0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(I_n)_{n\geq 0}$, definit prin $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx, n\geq 1$ şi $(w_n)_{n\geq 1}$ definit prin $w_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{2n+1}$.

(4p) **a)** Să se calculeze I_0 şi I_1.

(4p) **b)** Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}, \forall n\geq 2,\ n\in\mathbf{N}.$$

(4p) **c)** Utilizând metoda inducției matematice , să se arate că

$$I_{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(2p) **d)** Să se arate că $I_{2n+1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $1\leq\frac{I_n}{I_{n+1}}\leq\frac{n+1}{n}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$

(2p) **f)** Să se verifice că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=(w_n)^2\cdot\frac{\pi}{2}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.