Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta …**.021**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se scrie trei numere complexe cu modulul egal cu 1.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(2,-1)$ la dreapta $x+y+5=0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine ecuația cercului cu centrul în punctul $Q(1,1)$ care trece prin punctul $P(4,5)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(0,1,2)$, $M(0,2,3)$ şi $N(0,3,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,0,2)$, $B(0,2,1)$, $C(2,1,0)$ şi $D(-1,-2,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine un număr complex z care verifică egalitatea $z^2+z+1=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A=\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze rangul matricei $A=\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$.

(3p) **c)** Să se determine probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z}_{10}$ să verifice relația $\hat{x}^2=\hat{1}$.

(3p) **d)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+x+3$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(5)$.

(3p) **e)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+8^x=10$.

2.

(3p) **a)** Să se găsească o funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, derivabilă, astfel încât $f'(x)=x,\quad \forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se găsească o funcție continuă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, neconstantă, astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=1$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^x$ este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se găsească o funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 xe^x dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G=(0,\infty)\times\mathbf{R}$ pe care se definește legea de compoziție "$\circ$" prin $(a_1,x_1)\circ(a_2,x_2)=(a_1a_2,a_1x_2+x_1)$, pentru orice $(a_1,x_1),(a_2,x_2)\in G$.

(4p) **a)** Să se arate că $((a_1,x_1)\circ(a_2,x_2))\circ(a_3,x_3)=(a_1,x_1)\circ((a_2,x_2)\circ(a_3,x_3))$, $\forall\,(a_1,x_1),(a_2,x_2),(a_3,x_3)\in G$.

(4p) **b)** Să se verifice că $(a,x)\circ(1,0)=(1,0)\circ(a,x)=(a,x)$, $\forall\,(a,x)\in G$.

(4p) **c)** Să se verifice că $(a,x)\circ\left(\frac{1}{a},-\frac{x}{a}\right)=\left(\frac{1}{a},-\frac{x}{a}\right)\circ(a,x)=(1,0)$, $\forall\,(a,x)\in G$.

(2p) **d)** Să se găsească două elemente (a_1,x_1) și (a_2,x_2) din mulțimea G pentru care $(a_1,x_1)\circ(a_2,x_2)\neq(a_2,x_2)\circ(a_1,x_1)$.

(2p) **e)** Să se arate că legea "$\circ$" determină pe mulțimea G o structură de grup necomutativ.

(2p) **f)** Să se arate că $\underbrace{(a,x)\circ(a,x)\circ\ldots\circ(a,x)}_{de\ n\ ori}=\left(a^n,x\left(1+a+\ldots+a^{n-1}\right)\right),\forall(a,x)\in G$ și $n\in\mathbf{N}^*$

(2p) **g)** Să se demonstreze că pentru orice $(a,x)\in G$ și oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$, există $(u,v)\in G$ astfel încât $\underbrace{(u,v)\circ(u,v)\circ\ldots\circ(u,v)}_{de\ n\ ori}=(a,x)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze I_1.

(4p) **b)** Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$.

(4p) **c)** Utilizând metoda inducției matematice , să se arate că $I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$

(2p) **d)** Să se arate că $\sqrt{\frac{x-2}{x}}<\frac{x}{x+1}<\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$, $\forall x>2$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}<\sqrt{\frac{3}{2n+3}}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}I_n$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}$.