EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.024**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1, -2, 3)$ la punctul $E(0, 1, 2)$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $x^2 - 4y^2 = 12$ în punctul $P(-4, 1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(4, 2)$, $M(3, 3)$ și $N(2, 4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,1,1)$ și $D(1, 2, 3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$ și $C(2,1,1)$ să aparțină planului $x + ay + bz + c = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se găsească un polinom $g \in \mathbf{Z}_4[X]$, de gradul întâi, care să aibă exact două rădăcini în $\mathbf{Z}_4$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{3}\hat{x} = \hat{0}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x - 2$, are inversa $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, să se calculeze $g(0)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x^2 + 7) = \log_2(x^4 + 8)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X - 1$.

2.

(3p) **a)** Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabilă, astfel încât $f'(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se găsească o funcție continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, neconstantă, astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = 2007$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2$ este concavă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 (x+2) \cdot e^x dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numerele complexe $x_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, matricele $A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G = \{I_2, A, B\}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

(4p) **b)** Să se arate că $\det(A) = \det(B) = \det(I_2)$.

(4p) **c)** Să se arate că $A^2 = B$.

(2p) **d)** Să se determine matricea $M = A^2 + AB + B^2$.

(2p) **e)** Să se calculeze determinantul matricei

$$S_n = A^{3n-1} + A^{3n-2}B + A^{3n-3}B^2 + \ldots + A^2B^{3n-3} + AB^{3n-2} + B^{3n-1},\ \ n \geq 1.$$

(2p) **f)** Să se arate că mulțimea G, în raport cu înmulțirea matricelor, formează o structură de grup.

(2p) **g)** Să se dea un exemplu de mulțime cu 3 elemente din $M_2(\mathbf{C})$ diferită de G, care este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$ şi integralele $I_n(p)$, unde $n, p \in \mathbf{N}^*$, $I_n(p) = \int_0^1 (1-x^p)^n dx$.

(4p) **a)** Să se calculeze $I_1(p) = \int_0^1 (1-x^p) dx$.

(4p) **b)** Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n(p) = \dfrac{np}{np+1} I_{n-1}(p), \forall n \geq 2$, $n, p \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **c)** Să se arate că $I_n(n) = \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^2}{n^2+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **d)** Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

(2p) **e)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(n)$.