EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….026**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$ se consideră punctele $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 3, 3)$.

(4p) **a)** Să se determine distanța dintre punctele A și C.

(4p) **b)** Să se determine distanța de la punctul A la planul (xOy).

(4p) **c)** Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

(4p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 + 1 = 0$.

(2p) **e)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să aibă loc următoarea egalitate în mulțimea $\mathbf{C}$:
$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) = a + ib.$$

(2p) **f)** Să se calculeze aria cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $C_{10}^2 - C_{10}^8$.

(3p) **b)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul $g = X - a$ să dividă polinomul $f = X^3 - 1$.

(3p) **c)** Să se determine numărul funcțiilor injective $f : \{1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$.

(3p) **d)** Să se rezolve ecuația $\log_3^2(3x) = 1,\ x \in (0, \infty)$.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element din $(\mathbf{Z}_8, \cdot)$ să fie inversabil .

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f(f(-2))$.

(3p) **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(3p) **c)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-1, \infty)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_3, A_0, A \in M_3(\mathbf{Z})$, cu $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

funcţia $f_A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_A(x) = \det(A + xI_3)$ şi polinomul $g \in \mathbf{Z}[X]$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\det(A_0)$.

(4p) **b)** Pentru $x \in \mathbf{R}$, să se calculeze $\det(A_0 + xI_3)$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că există $a, b, c \in \mathbf{Z}$ astfel încât $\forall\, x \in \mathbf{R}$,

$f_A(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $\det(A) = c$.

(2p) **e)** Dacă $\det\left(A + \sqrt{2} \cdot I_3\right) = 0$, să se demonstreze că funcţia f_A are o rădăcină întreagă.

(2p) **f)** Dacă există $t \in \mathbf{Z}$ astfel încât $g(t)$ şi $g(t+1)$ sunt impare, să se demonstreze că polinomul g nu are rădăcini întregi.

(2p) **g)** Dacă $\det(A)$ şi $\det(A + I_3)$ sunt impare, să se demonstreze că $\forall\, q \in \mathbf{Q}$,

$\det(A + qI_3) \neq 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cu $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 - 2$ şi astfel încât $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = x \cdot f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)$. Se consideră cunoscute formulele $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y$, $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$, $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\int_{-2}^{2} f_1(x)\,dx$ şi $\int_{-2}^{2} f_2(x)\,dx$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f_3(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f_2(2\cos x) = 2\cos 2x$.

(2p) **d)** Folosind eventual inducţia matematică, să se demonstreze că

$\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f_n(2\cos x) = 2\cos nx$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $\int_{-2}^{2} f_n(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{\pi} f_n(2\cos t) \cdot \sin t\, dt$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că şirul $(f_n(1))_{n \in \mathbf{N}^*}$ este divergent.

(2p) **g)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-2}^{2} x \cdot f_n(x)\,dx = 0$.