EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….031

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(3,0,2)$ la planul $x + 5y + 2z - 4 = 0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul $x^2 + y^2 = 4$ şi dreapta $y = 3x$.

(4p) **d)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{w} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ să fie perpendiculari.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 2)$, $B(1, 4)$ şi $C(-1, 8)$**.**

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\sin 10^\circ + i\cos 10^\circ)^6 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine numărul polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2 din $\mathbf{Z}_2[X]$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_7$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

(3p) **c)** Să se determine numărul de mulțimi X care verifică $\{1,2,3\} \cup X = \{1,2,3,4,5\}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 2 \cdot 9^x = 3$.

(3p) **e)** Să se arate că $\log_3 4 > \log_4 3$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2\cos x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ şi $g = X^4 + 1$, unde $a,b,c,d \in \mathbf{Q}$, iar g are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$ şi matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -d & a & b & c \\ -c & -d & a & b \\ -b & -c & -d & a \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $g = \left(X^2 - X\sqrt{2} + 1\right)\left(X^2 + X\sqrt{2} + 1\right)$

(4p) **b)** Să se arate că $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$.

(4p) **c)** Să se determine rangul matricei V .

(2p) **d)** Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) & x_4 f(x_4) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) & x_4^2 f(x_4) \\ x_1^3 f(x_1) & x_2^3 f(x_2) & x_3^3 f(x_3) & x_4^3 f(x_4) \end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Utilizând relația $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall\, X, Y \in \mathbf{M_4}(\mathbf{C})$, să se arate că $\det(A) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \cdot f(x_4)$.

(2p) **f)** Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $\det(A) = 0$, atunci $a = b = c = d = 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\ge1}, (b_n)_{n\ge1}$, definite prin $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ şi $b_n = a_n + \frac{1}{n! \cdot n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Admitem cunoscut faptul că şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent către e.

(4p) **a)** Să se verifice că şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

(4p) **b)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător.

(2p) **c)** Să se arate că $(b_n)_{n\ge1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

(2p) **d)** Să se arate că $a_{n+1} < e < b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{1}{(n+1)!} < e - a_n < \frac{1}{n! \cdot n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că numărul e este irațional.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$, $\forall k \in \mathbf{N}$.

(2p) **h)** Să se arate că *nu există* două polinoame nenule $f, g \in \mathbf{R}[X]$, cu proprietatea $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.