EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….032**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(4,3)$ la dreapta de ecuație $2x+y-1=0$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=a+ib$.

(4p) **d)** Să se calculeze lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC având laturile $AB=4$, $BC=6$, $CA=8$.

(2p) **e)** Să se determine $a\in(0,\infty)$ astfel încât punctul $A(a,1)$ să aparțină elipsei $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2p) **f)** Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$, unde $A(1,1,1), B(1,1,0), C(1,0,1)$ și $D(0,1,1)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră inelul $\mathbf{Z}_4$ și mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\middle|\, \hat{a},\hat{b}\in \mathrm{Z}_4\right\}$.

(3p) **a)** Să se determine numărul elementelor inversabile față de înmulțire din inelul $\mathbf{Z}_4$.

(3p) **b)** Să se rezolve ecuația $\hat{x}^2=\hat{2}\hat{x}$ în multimea $\mathbf{Z}_4$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\hat{1}\cdot\hat{2}+\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{3}\cdot\hat{1}$ în inelul Z_4.

(3p) **d)** Să se calculeze numărul elementelor mulțimii M.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca alegând o matrice din mulțimea M, aceasta să aibă suma elementelor egală cu $\hat{0}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathrm{R}\setminus\{-1\}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

(3p) **a)** Să se determine ecuația asimptotei verticale a graficului funcției f.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră o funcție bijectivă $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ cu proprietățile: $f(z+w)=f(z)+f(w)$,

$f(z\cdot w)=f(z)\cdot f(w)\quad \forall z,w\in\mathbf{C}$, și $f(x)\in\mathbf{R},\ \forall x\in\mathbf{R}$

(4p) **a)** Să se arate că $f(0)=0$ şi $f(1)=1$.

(4p) **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$f(z_1+z_2+...+z_n)=f(z_1)+f(z_2)+...+f(z_n), \forall n\in\mathbf{N}^*$ şi $\forall z_1,z_2,...z_n\in\mathbf{C}$.

(2p) **c)** Să se arate că $f(r)=r,\forall r\in\mathbf{Q}$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $x\in\mathbf{R}$, atunci $f(x)>0$ dacă şi numai dacă $x>0$.

(2p) **e)** Dacă $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ cu $x_1<x_2$, să se arate că $f(x_1)<f(x_2)$.

(2p) **f)** Să se arate că $f(x)=x,\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că $f(i)=i$ sau $f(i)=-i$.

(2p) **h)** Să se arate că $f(z)=z$, $\forall z\in\mathbf{C}$ sau $f(z)=\bar{z},\forall z\in\mathbf{C}$.

SUBIECTUL IV (20p)

(4p) Se consideră funcțiile: $f_n:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ definite prin $f_0(x)=x-\sin x$ şi

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt,\quad \forall n\in\mathbf{N},\ \forall x\in[0,\infty).$$

a) Să se verifice că $f_1(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1,\ \forall x\in[0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că f_1 este convexă.

(4p) **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că:

$$f_{2n}(x)=(-1)^n\left(-\sin x+\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),\ \forall n\in\mathbf{N},\ \forall x\in[0,\infty).$$

(2p) **d)** Să se arate că $f_n(x)>0,\ \forall n\in\mathbf{N},\ \forall x\in(0,\infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că:

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}<\sin x<\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!},\ \forall n\in\mathbf{N}^*,\ \forall x\in(0,\infty).$$

(2p) **f)** Să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sin x,\quad \forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\sin 1\notin\mathbf{Q}$.