EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….034**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-5)$, $B(-1,2)$, $C(4,7)$, $D(5,0)$.

(4p) **a)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(0,-5)$ şi $C(4,7)$ să aparțină dreptei $ax+by=5$

(4p) **b)** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului BCD.

(4p) **c)** Să se arate că dreptele AC şi BD sunt perpendiculare.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului ABC.

(2p) **e)** Să se rezolve ecuația $\sin 3x=0$, $x\in(0,2\pi)$.

(2p) **f)** Să se determine modulul numărului complex $(3+4i)\cdot(-1-i)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2}=2$.

(3p) **b)** Să se determine al treilea termen al dezvoltării $\left(2x-\sqrt[3]{x}\right)^{50}$.

(3p) **c)** Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului $f=X^4$ la polinomul $g=X^2-3X$.

(3p) **d)** Să se arate că numărul 2007 aparține progresiei aritmetice $2,7,12,17,\ldots$

(3p) **e)** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$. Să se determine $f(f(2))$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{2x},\forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se determine asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f.

(3p) **e)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0,1)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbf{R} \right\}$ și funcția $f : \mathbf{C} \to M$,

$f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Se consideră cunoscute formulele

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ și $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$.

(4p) **a)** Să se arate că $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $a^2 + b^2 = r^2$, $r \in [0,\infty)$ atunci există $t \in [0,2\pi)$ astfel ca $a = r\cos t$ și $b = r\sin t$.

(4p) **c)** Să se arate că $\begin{pmatrix} r\cos t & -r\sin t \\ r\sin t & r\cos t \end{pmatrix}^n = r^n \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ atunci $a_n^2 + b_n^2 = (a^2+b^2)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $a^2 + b^2 < 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă matricea $X \in M_2(\mathrm{R})$ verifică relația

$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, atunci $X \in M$.

(2p) **g)** Să se determine numărul matricelor $X \in M_2(\mathbf{R})$ care verifică ecuația

$X^{2007} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ şi $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \geq 0$.

(4p) **a)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

(4p) **b)** Să se arate că $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

(4p) **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(2p) **d)** Să se arate că $\sqrt{2n+1} \leq a_n \leq \sqrt{(2n+1) + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}}$, $\forall n \geq 1$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0,\infty)$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) = \infty$.