EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.037**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$ se consideră punctele $O(0,0,0)$, $A(0,0,2)$, $B(3,0,0)$, $C(3,4,0)$.

(4p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului OBC.

(4p) **b)** Să se calculeze volumul tetraedrului $OABC$.

(4p) **c)** Să se determine semnul expresiei $E = \cos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4p) **d)** Să se determine lungimea ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic cu catetele de lungime 5 și 12.

(2p) **e)** Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2 = 4x$ în punctul $A(1,2)$.

(2p) **f)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -1$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve ecuația $2 \cdot \log_9^2 x - \log_9 x - 1 = 0$, $x > 0$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\frac{C_7^3}{C_7^4}$.

(3p) **c)** Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$ sunt rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0$ să se calculeze expresia: $(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 + (x_3+1)^2$.

(3p) **d)** Să se afle probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_4$, să fie o soluție a ecuației $\hat{2}\hat{x}^2 + \hat{2}\hat{x} = \hat{0}$.

(3p) **e)** Se consideră propoziția: „$\mathbf{Z}_3 \subset \mathbf{Z}_4$”.

Să se stabilească valoarea de adevăr a acestei propoziții, justificând răspunsul.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f(0)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R} - \{-1\}$.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru $n \in \mathbf{Z}$, se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G = \{ A(k) \mid k \in \mathbf{Z} \}$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $\forall\, n, p \in \mathbf{Z}$, $A(n) \cdot A(p) = A(n + p + 1)$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că $\forall\, k \in \mathbf{N}^*$, $\forall\, t \in \mathbf{Z}$, $(A(t))^k = A(k \cdot t + k - 1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $(A(0))^{2007}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $A(-1) \cdot A(k) = A(k) \cdot A(-1) = A(k)$, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că toate matricele din mulțimea G au determinantul egal cu 0 şi rangul egal cu 1.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

(2p) **g)** Dacă mulțimea $N \neq \{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului $(G, \cdot)$, să se demonstreze că N are cel puțin 2007 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$, $g, h : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, $h(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $\forall\, x \geq 1$, $g'(x) = -\dfrac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2x\sqrt{x}}$ şi $h'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că $\forall\, x \geq 1$, $g(x) \leq 0 \leq h(x)$.

(4p) **c)** Pentru $t > 1$, aplicând teorema lui *Lagrange* funcției f pe intervalul $[1, t]$, să se demonstreze că există $c(t) \in (1, t)$ astfel încât $\dfrac{1}{c(t)} = \dfrac{\ln t}{t - 1}$.

(2p) **d)** Pentru $t > 1$, să se demonstreze că $\dfrac{2(t-1)}{t+1} < \ln t < \dfrac{t-1}{\sqrt{t}}$.

(2p) **e)** Pentru $t > 1$, să se demonstreze că $\sqrt{t} < c(t) < \dfrac{t+1}{2}$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că nu există un polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $c(x) = P(x)$, $\forall\, x > 1$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că $1{,}7 < \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{t^2 - 1}{\ln t}\, dt < 1{,}9$.