EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….041**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze partea reală a numărului complex $(1-i)^{20}$.

(4p) **b)** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât punctul $A(1, 0, m)$ să aparțină planului de ecuație $x+y+z-3=0$.

(4p) **c)** Să se afle aria totală a unui cub cu latura de 2.

(4p) **d)** Să se calculeze $\cos\frac{7\pi}{3}$.

(2p) **e)** Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $x-y=0$ și elipsa de ecuație $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(-1, 1)$ și $B(2, -2)$ să aparțină dreptei $x+ay+b=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se determine termenul din dezvoltarea $(a+1)^{12}$ care îl conține pe a^5.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $\frac{(n+1)!}{n!}=30$, pentru $n \in \mathbf{N}$.

(3p) **d)** Să se determine care este probabilitatea ca aruncând un zar să obținem una din rădăcinile ecuației $x^2-5x+4=0$.

(3p) **e)** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{2007}$. Să se calculeze $(f \circ f)(1)$.

2. Se consideră funcția $f:(e,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x>e$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to e^2}\frac{f(x)-f(e^2)}{x-e^2}$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare.

(3p) **d)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$.

Se consideră cunoscute formulele $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ şi $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se arate că $(X-1)f = X^5 - 1$.

(4p) **b)** Să se arate că $f = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$.

(4p) **c)** Să se arate că rădăcinile polinomului f sunt $x_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$, unde $k \in \{1,2,3,4\}$.

(2p) **d)** Să se demonstreze egalitatea $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = -1$.

(2p) **e)** Să se deducă din relația anterioară că $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(2p) **f)** Să se arate că are loc egalitatea $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) = 1$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $f_i \in \mathbf{C}[X]$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, satisfac relația $f_1(X^5) + Xf_2(X^5) + X^2 f_3(X^5) + X^3 f_4(X^5) = f(X) f_5(X)$ atunci polinomul $X-1$ divide polinomul f_i, pentru orice $i \in \{1,2,3,4\}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\ge1}$ şi $(x_n)_{n\ge1}$, cu $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ şi $x_n = \frac{c_1}{1^2} + \frac{c_2}{2^2} + ... + \frac{c_n}{n^2}$, unde $c_k \in \{-1, 1\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se arate că $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$, $\forall\, k \in \mathbf{N}^*$, $k \ge 2$.

(4p) **b)** Să se arate că $\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este monoton şi mărginit.

(2p) **d)** Să se arate că $\forall\, p \in \mathbf{N}^*$ şi $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $n \in [2^p, 2^{p+1})$, există A şi B numere întregi impare, astfel încât $2^{2p} x_n = \frac{A}{B}$.

(2p) **e)** Să se arate că pentru orice $n \ge 2$ numărul x_n nu este număr întreg.

(2p) **f)** Să se arate că pentru $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, există $y_n, z_n \in [0, \infty)$, astfel încât $x_n = y_n - z_n$.

(2p) **g)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent.