EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….045

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(4,3,2)$ la planul $x + y + z + 10 = 0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2 + 4y^2 = 40$ dusă prin punctul $P(2,-3)$.

(4p) **d)** Să se arate că triunghiul cu vârfurile în punctele $A(3,0)$, $B(0,4)$ şi $C(3,4)$ este dreptunghic.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3,0)$, $B(0,4)$ şi $C(3,4)$.

(2p) **f)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât vectorul $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ să fie perpendicular pe vectorul $\vec{w} = a\vec{i} + \vec{j}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_{12}$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze numărul termenilor iraționali ai dezvoltării binomului $\left(1+\sqrt{2}\right)^4$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3 + x^2 - 2 = 0$.

(3p) **e)** Să se calculeze inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f_n \in \mathbf{C}[X]$, definite prin $f_0 = 1$, $f_1 = X$, $f_2 = \frac{X(X-1)}{1 \cdot 2}, \ldots,$

$f_n = \frac{X(X-1)\cdot \ldots \cdot (X-n+1)}{n!}$, …, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se arate că $f_n(k) = C_k^n$, $\forall\, k, n \in \mathbf{N}^*$, $n \le k$.

(2p) **b)** Să se arate că $f_n(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{Z}$.

(4p) **c)** Să se găsească un polinom g de gradul trei cu coeficienți raționali, cel puțin unul neîntreg, astfel încât $g(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

(4p) **d)** Să se arate că $grad(f_n) = n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $h \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom de grad 3, atunci există $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{C}$, unice, astfel încât $h = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $w \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom de grad 3, astfel încât $w(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci $w(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $u \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom de grad 3, astfel încât $u(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci există $p \in \mathbf{Z}$, astfel încât $u(k) \ne p$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f_0(x) = 1 - \cos x$ și

$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f_1(x) = x - \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x > 0$.

(2p) **d)** Să se arate că graficul funcției f_1 nu are asimptotă către ∞.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^2}{2!} + (-1)^n + (-1)^{n+1}\cos x.$$

(2p) **f)** Să se arate că $0 \le f_n(x) \le 2 \cdot \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x > 0$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.