EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta** ….049*

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine partea reală a numărului complex $z = i^6 + i^7$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,-2), B(2,0), C(0,4)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos^2(75^0) + \cos^2(15^0)$.

(4p) **d)** Să se determine în câte puncte se intersectează dreapta de ecuație $y = 1$ cu cercul de centrul $O(0,0)$ și de rază egală cu 1.

(2p) **e)** Să se determine câte puncte cu ambele coordonate întregi sunt situate în interiorul cercului cu centrul în $O(0,0)$ și de rază egală cu 1.

(2p) **f)** Să se scrie ecuația unei drepte paralele cu dreapta de ecuație $3x - y - 2 = 0$ care trece prin punctul $O(0,0)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt[3]{3}$.

(3p) **b)** Să se determine câte numere de 2 cifre scrise în baza 10 nu conțin cifrele 2 ,3, 4 și 5 .

(3p) **c)** Să se determine câte numere întregi c satisfac : $2 < \log_2 c < 3$.

(3p) **d)** Să se determine câte numere întregi d satisfac relația $\left[\frac{2d}{3}\right] = 2$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de polinom de gradul al treilea cu coeficienți întregi pentru care produsul rădăcinilor sale este egal cu 2.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

(3p) **c)** Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = f(\sqrt{3})$ și $b = f(2)$.

(3p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$ și polinomul $f = X^n - (\cos 2na + i \sin 2na)$, cu rădăcinile notate $x_0, x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbf{C}$ și formulele

$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$, $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$ și $2\sin a \cos a = \sin 2a$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(1)$ și $f(-1)$.

(4p) **b)** Să se verifice identitatea $1 - \cos 2x - i \sin 2x = -2i \sin x(\cos x + i \sin x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se verifice identitatea $1 + \cos 2x + i \sin 2x = 2 \cos x(\cos x + i \sin x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $x_k = \cos\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right)$, $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

(2p) **e)** Să se arate că $f = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \left(\cos\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)$.

(2p) **f)** Să se arate că $\sin na = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$, $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$.

(2p) **g)** Să se arate că $\cos(2p+1)a = 2^{2p}(-1)^p \prod_{k=0}^{2p}\cos\left(a + \frac{k\pi}{2p+1}\right)$, $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $g(x) = \frac{ex}{e-1} + 1$, iar f este continuă în $x = 0$, $f(0) = 1$ și $f(x) - f\left(\frac{x}{e}\right) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se arate că funcția g verifică relațiile $g(0) = 1$ și $g(x) - g\left(\frac{x}{e}\right) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n} = \frac{e}{e-1}\left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n}\right)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(x \cdot e^{-n-1}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că $f\left(\frac{x}{e}\right) - f\left(\frac{x}{e^2}\right) = \frac{x}{e}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se arate că $f\left(\frac{x}{e^n}\right) - f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) = \frac{x}{e^n}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

(2p) **g)** Să se determine $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.