EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….055**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se verifice că punctul $M(1,0,1)$ aparține planului $x+y+z=2$.

(4p) **b)** Dacă în triunghiul ascuțitunghic ABC avem $\sin A=\frac{1}{2}$, să se determine $m(\hat{B})+m(\hat{C})$.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$, unde $A(4,0)$ și $B(0,2)$.

(4p) **d)** Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2+y^2=4$ și hiperbola de ecuație $x^2-y^2=1$.

(2p) **e)** Să se determine numărul soluțiilor din intervalul $[0,3\pi]$ ale ecuației $\sin x=1$.

(2p) **f)** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât numărul complex $z=a+(1-a)\cdot i$ să aibă modulul 1.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $1+3+5+...+49$.

(3p) **b)** Să se calculeze $1+C_3^2+C_4^2+C_5^2$.

(3p) **c)** Să se determine soluțiile din mulțimea $\mathbf{N}^*$ ale inecuației $2^x<2^{\frac{4}{x}}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în intervalul $(0,\infty)$ ecuația $\log_2 x=2$.

(3p) **e)** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ este injectivă.

2. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x>-1$.

(3p) **b)** Să se determine punctele de minim local ale funcției *f*.

(3p) **c)** Să se determine numărul asimptotelor verticale la graficul funcției *f*.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_5)$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$

și mulțimea $M = \left\{ A(\hat{a}) = \hat{a} \cdot I_2 + B \mid \hat{a} \in \mathbf{Z}_5 \right\}$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $B^4 = I_2$.

(4p) **b)** Să se determine toate elementele $\hat{a} \in \mathbf{Z}_5$ astfel încât $\det(A(\hat{a})) = \hat{0}$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $\forall\, \hat{x} \in \mathbf{Z}_5$, $\hat{x}^5 = \hat{x}$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, atunci $\widehat{C_5^k} = \hat{0}$ în $\mathbf{Z}_5$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\forall\, \hat{a} \in \mathbf{Z}_5$, $(A(\hat{a}))^5 = A(\hat{a})$.

(2p) **f)** Să se determine numărul soluțiilor din mulțimea M ale ecuației $X^{2007} = X^3$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că ecuația $X^5 - X = I_2$ nu are soluții de forma $X = \begin{pmatrix} x & 2007 \\ 2007 & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, cu $x_n = F\left(\frac{1}{1}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots + F\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$. Se admite cunoscut faptul că șirul $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $c_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \in \mathbf{N}^*$, este convergent.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $F'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Aplicând teorema lui *Lagrange* funcției F pe intervalul $[0, x]$, să se demonstreze că $\forall\, x > 0$, $\exists\, d_x \in (0, x)$ astfel încât $F(x) = x \cdot f(d_x)$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că funcția F este bijectivă.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

(2p) **g)** Să se arate că $\forall\, \alpha > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n^\alpha} = 0$.