EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* …065**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul $A\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

(4p) **c)** Să se arate că punctul $A_n\left(\frac{n^2-1}{n^2+1},\frac{2n}{n^2+1}\right)$ este pe cercul de ecuație $x^2+y^2=1,\ \forall n\in\mathbf{N}$.

(4p) **d)** Să se arate că pe cercul de ecuație $x^2+y^2=1$ există cel puțin 2007 puncte cu ambele coordonate raționale.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,3,2)$, $B(3,2,1)$, $C(2,1,3)$ și $D(0,0,0)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $P(2,3)$ și $Q(3,2)$ să fie pe dreapta $x+ay+b=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se verifice identitatea $\hat{x}^3=\hat{x},\ \forall\hat{x}\in\mathbf{Z}_6$.

(3p) **b)** Să se arate că $(\hat{x}+\hat{y})^3=\hat{x}^3+\hat{y}^3,\ \forall\hat{x},\hat{y}\in\mathbf{Z}_6$

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^7+x+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+7)=\log_2(2x^2+3x+7)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f=X^3-X^2-24X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(x^2+4)-\ln(x^2+1)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se arate că $0<f(x)\le\ln4,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, mulțimea $C(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$ şi

funcția $f:C(A)\to C(A),\ \ f(X)=X^6$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze A^2 şi A^3.

(4p) **c)** Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $X\in M_3(\mathbf{R})$ şi $X\cdot A=A\cdot X$, atunci $X\in C(A)$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $P,Q\in C(A)$, atunci $P+Q\in C(A)$ şi $P\cdot Q\in C(A)$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$ şi $f(X)=O_3$, atunci $X=O_3$.

(2p) **g)** Să se arate că funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $a_n=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}\cos\frac{a}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{a}{2^n}$, $n\geq 1$,

$a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos x$.

Se presupun cunoscute relațiile $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $1+\cos x=2\cdot\cos^2\frac{x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se arate că $f'(x)=0$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f(0)$ şi $f\left(\frac{\pi}{2006}\right)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_0^{2006\pi} f(x)\,dx$.

(2p) **d)** Să se arate că pentru orice $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $n\in\mathbf{N}^*$, are loc egalitatea $a_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$.

(2p) **e)** Să se verifice egalitățile $\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ şi $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{\sin a}{a}$, $\forall\, a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **g)** Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n\text{ radicali}}=\frac{2}{\pi}$$