EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* …067**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2,3)$ la punctul $E(0,-1,2)$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $4x^2 - y^2 = 15$ dusă prin punctul $P(2,1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(4, 2)$, $M(3, 3)$ și $N(1, 5)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,1,1)$ și $D(3,2,1)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b,c \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1,1,3)$, $B(1,3,1)$ şi $C(3,1,1)$ să aparțină planului $x + ay + bz + c = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se găsească un polinom $g \in \mathbf{Z_4}[X]$, de gradul întâi, care să nu aibă rădăcini în $\mathbf{Z_4}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z_6}$ să verifice relația $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{0}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x + 2$, are inversa $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, să se calculeze $g(0)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(3x^2 + 5) = \log_2(x^4 + 7)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X + 2$.

2.

(3p) **a)** Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabilă, astfel încât $f'(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se găsească o funcție continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, neconstantă, astfel încât $\int_0^1 f(x)\,dx = 7$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 xe^{x+1}\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulţimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z} \right\}$.

(4p) **a)** Să se arate că dacă $A \in M$ şi $\det(A) = 0$, atunci $A = O_2$.

(4p) **b)** Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbf{N}$, numărul $a^2 + 1$ nu se divide cu 3.

(4p) **c)** Să se arate că $\det(A) \neq -1$, pentru orice $A \in M$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

(2p) **e)** Dacă $A \in M$, $A \neq O_2$ şi $A^{-1} \in M$ să se arate că $\det(A) = 1$.

(2p) **f)** Să se arate că există cel puţin 2007 matrice $A \in M$ care verifică $\det(A) = 1$.

(2p) **g)** Ştiind că pentru $n \in \mathbf{N}^*$ oarecare, există $a_n, b_n \in \mathbf{Z}$, astfel încât

$\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & 3b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$, să se arate că $a_n = \frac{1}{2}\left[\left(a + \sqrt{3}b\right)^n + \left(a - \sqrt{3}b\right)^n \right]$ şi

$b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(a + \sqrt{3}b\right)^n - \left(a - \sqrt{3}b\right)^n \right]$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru $t \in \mathbf{R}$, se consideră funcţia $f_t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_t(x) = x^3 + t^4 x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_t'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} f_t(x)$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f_t(x)$.

(4p) **c)** Să se arate că funcţia f_t este bijectivă pentru orice $t \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că există o unică funcţie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică relaţia

$(g(t))^3 + t^4 g(t) - t^3 = 0$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că $g(0) = 0$.

(2p) **f)** Să se arate că $g(t) = f_t^{-1}\left(t^3\right)$, $\forall t \in \mathbf{R}$ şi că funcţia g este continuă pe $\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că funcţia g este derivabilă în $t = 0$ şi $g'(0) = 1$.