EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….068**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine distanța dintre punctele $A(-1,2)$ și $B(2,-1)$.

(4p) **b)** Să se determine aria triunghiului ABC dacă $AB = AC = 4\sqrt{2}$ și $BC = 10$.

(4p) **c)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

(4p) **d)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3-i}{1+2i}$.

(2p) **e)** Să se calculeze cosinusul unghiului determinat de diagonala unui cub cu o față laterală a sa.

(2p) **f)** Să se calculeze $\cos x$, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

(3p) **a)** Să se calculeze $(f \circ f)(2)$.

(3p) **b)** Să se arate că $f(x) \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ să verifice relația $f(x) \leq 5$.

(3p) **d)** Să se calculeze suma $f(1) + f(2) + \ldots + f(20)$.

(3p) **e)** Să se rezolve ecuația $f(\log_2 x) = 1$, $x \in (0, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

(3p) **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intrvalul $(1, \infty)$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **d)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Notăm cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a și cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a. Se consideră $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, și funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx].$$

(4p) **a)** Să se calculeze $f(0)$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $\forall x \in \mathbf{R}$, există $k \in \mathbf{Z}$, astfel încât $0 \leq x - \frac{k}{n} < \frac{1}{n}$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(x) = 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$.

(2p) **e)** Să se arate că $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $0 \leq a_1 < a_2 < ... < a_s < 1$ și $0 \leq b_1 < b_2 < ... < b_t < 1$, unde $s, t \in \mathbf{N}^*$ și $[x + a_1] + [x + a_2] + ... + [x + a_s] = [x + b_1] + [x + b_2] + ... + [x + b_t]$, $\forall x \in \mathbf{R}$, atunci $s = t$ și $\{a_1, a_2, ..., a_t\} = \{b_1, b_2, ..., b_t\}$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $0 \leq a_1 < a_2 < ... < a_s < 1$ și $[x + a_1] + [x + a_2] + ... + [x + a_s] = [sx]$, $\forall x \in \mathbf{R}$, unde $s \in \mathbf{N}^*$, atunci $\{a_1, a_2, ..., a_s\} = \left\{0, \frac{1}{s}, ..., \frac{s-1}{s}\right\}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + f_n(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $f_2(x) \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $1 + \int_0^x f_n(t)dt = f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_{2n}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și că ecuația $f_{2n-1}(x) = 0$ are soluție unică în $\mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că funcția f_{2007} este bijectivă.

(2p) **g)** Să se arate că funcția f_{2008} este convexă pe $\mathbf{R}$.