EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….070**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1,3)$ și $B(4,-1)$.

(4p) **b)** Să se calculeze modulul numărului complex $12-7i$.

(4p) **c)** Să se scrie ecuația cercului cu centrul în $A(1,3)$ și de rază 1.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$.

(2p) **e)** Să se determine care număr este mai mare: $\cos\frac{3\pi}{7}$ sau $\cos\frac{5\pi}{7}$.

(2p) **f)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,3)$ și este paralelă cu dreapta $x+y=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma numai cu cifrele 2, 4, 6.

(3p) **b)** Să se determine numărul submulțimilor mulțimii $\{1, 2, 4, 6\}$.

(3p) **c)** Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $\log_2\left(x^2+3\right)=2$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze suma $1+5+9+13+...+37$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f=X^3+2X^2-2X-4$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+\sin x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, și $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$, care verifică $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{Z}$ și $g(x+y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{Q}$.

(4p) **a)** Să se arate că $f(0) = g(0) = 0$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{Z}$ și $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.

(4p) **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Z}$, avem $f(a_1 + a_2 + ... + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $f(1) = a \in \mathbf{Q}$, atunci $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbf{Z}$.

(2p) **e)** Să se arate că funcția f este injectivă dacă și numai dacă $f(1) \neq 0$.

(2p) **f)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

(2p) **g)** Să se arate că $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$ și șirurile $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\geq 2}$ și $(c_n)_{n\geq 2}$

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot \ln 2} + \frac{1}{3 \cdot \ln 3} + ... + \frac{1}{n \cdot \ln n},\ b_n = a_n - f(n),\ c_n = a_n - f(n+1),\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq 2.$$

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (1, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $(1, \infty)$.

(2p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall k \in (1, \infty)$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{c \ln c}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \dfrac{1}{k \cdot \ln k}$, $\forall k \in (1, \infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 2}$ este strict descrescător iar șirul $(c_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător.

(2p) **f)** Să se arate că șirurile $(b_n)_{n\geq 2}$ și $(c_n)_{n\geq 2}$ sunt convergente și au aceeași limită .

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) **h)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(2^n+1)\ln(2^n+1)} + \dfrac{1}{(2^n+2)\ln(2^n+2)} + ... + \dfrac{1}{3^n \ln 3^n}\right)$.