EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….072**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi 4 şi 5.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $E(-2, 3)$ la dreapta $x-2y+3=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2=8x$ în punctul $P(2,4)$.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $L(1,1)$, $M(2,2)$, $N(-1,2)$.

(2p) **e)** Să se calculeze cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{w}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $P(2,4)$ şi $Q(4,2)$ să aparțină dreptei de ecuație $x+ay+b=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\hat{2}^{2007}$ în $\mathbf{Z}_5$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z}_7$ să verifice relația $\hat{x}^2=\hat{1}$.

(3p) **c)** Să se determine $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, care verifică egalitatea $C_n^2=10$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(4^x+4\right)=x+2$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f=X^4-X^2-24$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2\sin x+3\cos x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

SUBIECTUL III (20p)

Dacă $X \in M_2(\mathbf{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm prin $\overline{X}$, matricea $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex z. Considerăm funcţia $f : M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C})$, $f(X) = \overline{X}$.

Pentru o matrice inversabilă $A \in M_2(\mathbf{C})$, definim funcţia $g_A : M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C})$,

$g_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ şi $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\forall z, w \in \mathbf{C}$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ şi $f(X \cdot Y) = f(X) \cdot f(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$.

(4p) **c)** Să se arate că $(f \circ f)(X) = X$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **d)** Să se arate că funcţia f este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

(2p) **e)** Să se arate că $g_A(X+Y) = g_A(X) + g_A(Y)$

şi $g_A(X \cdot Y) = g_A(X) \cdot g_A(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **f)** Să se arate că funcţia g_A este bijectivă .

(2p) **g)** Să se arate că pentru orice matrice inversabilă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $f \neq g_A$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f_0(x) = e^x$ şi $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$,

$\forall n \in \mathbf{N}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f_1(x) = e^x - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f_0.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$f_{n+1}(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbf{N}^*, \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

(2p) **e)** Să se arate că $0 < f_n(x) \le e^x \cdot \dfrac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x > 0$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $\forall x > 0$.

(2p) **g)** Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{(2n)!}\right).$$