EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**076**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze conjugatul numărului complex $(1-2i)(i-2)$.

(4p) **b)** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, unde $A(1, 2)$, $B(0, 3)$ și $C(4, 4)$.

(4p) **c)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.

(4p) **d)** Să se determine numărul real a pentru care dreptele de ecuații $x + 2y + 1 = 0$ și $2x - ay - 1 = 0$ sunt perpendiculare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 1, -2)$, $B(1, -2, 1)$, $C(-2, 1, 1)$ și $D(-1, -2, -3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{2+i}{i-5} = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine numerele naturale $n \geq 1$ pentru care $\sqrt{1} \cdot \sqrt{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{n} < 5$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ să fie divizibil cu 2 sau cu 3.

(3p) **c)** Să se determine câte submulțimi ale mulțimii $\{a, b, c, d, e\}$ conțin mulțimea $\{a, b\}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x - 25 = 0$.

(3p) **e)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care $x^2 - ax + 9 > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2006} + x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = X^5 - 1$ şi $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

În mulțimea $M_2(\mathbf{Q})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

(4p) **b)** Să se verifice că $g = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$, unde $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(4p) **c)** Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$

(2p) **d)** Se consideră polinomul cu coeficienții raționali $h = X^2 + pX + q$, $q \neq 0$. Să se arate că restul împărțirii polinomului f la polinomul h este un polinom de gradul 1.

(2p) **e)** Să se verifice că $A^2 - (r+u)A + (ru - st)I_2 = O_2$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A^5 = I_2$, atunci matricea A este inversabilă.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $A^5 = I_2$, atunci $A = I_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1 + a + ... + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

(4p) **b)** Să se deducă relația:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(4p) **c)** Să se arate că $0 \leq \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leq x^{2(n+1)}$, $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} dx = 0$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n\left(a_{2n} - \frac{\pi}{4}\right)$.