EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta **….080**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $\sin 90^\circ + \sin 270^\circ$.

(4p) **b)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție al dreptelor $d_1 : x - y = 0$ și $d_2 : 2x + y - 6 = 0$.

(4p) **c)** Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$, știind că dreptele $d_1 : x - y = 0$ și $d_2 : \alpha x + y - 6 = 0$ sunt perpendiculare.

(4p) **d)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ dusă prin punctul $A(3, 2)$.

(2p) **f)** Să se determine aria unui triunghi care are laturile exprimate prin numere naturale și are perimetrul egal cu 6.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$ și $g(x) = x^2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $(f \circ g)(-1)$ și $(g \circ f)(-1)$.

(3p) **b)** Să se arate că $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f(2x) = 2f(x)$.

(3p) **d)** Să se calculeze suma $f(0) + f(1) + ... + f(9)$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$ să verifice inegalitatea $f(x) \geq g(x)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 4x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$ și strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, $A \neq \alpha I_2$, $\alpha \in \mathbf{R}$ şi mulțimea

$C(A)=\{X \in M_2(\mathbf{R}) \mid A\cdot X = X\cdot A\}$.

(4p) **a)** Să se arate că dacă $X=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in C(A)$ şi $b\neq 0$, $c\neq 0$, $a\neq d$ atunci

$\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{a'-d'}{a-d}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2$.

(4p) **c)** Să se arate că $C(A)=\{\alpha A+\beta I_2 \mid \alpha,\beta \in \mathbf{R}\}$.

(2p) **d)** Să se arate că există matrice $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$ astfel ca $\det(X^2+Y^2)<0$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $B \in C(A)$, atunci $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $B \in C(A)$, atunci $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $B, C \in C(A)$, atunci $\det(B^2+C^2)\geq 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_a:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $a\in\mathbf{R}$,

$$f_a(x)=\begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},\quad h(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

(4p) **a)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0} g(x)$.

(4p) **b)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbf{R}$, funcția f_a nu are limită în punctul $x=0$.

(4p) **c)** Să se arate că g este continuă pe **R**.

(2p) **d)** Să se arate că h este derivabilă pe **R**.

(2p) **e)** Să se arate că $h'(x)=2g(x)-f_0(x)$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se arate că f_a admite primitive dacă şi numai dacă $a=0$.

(2p) **g)** Să se determine valorile lui *a* pentru care funcția f_a^2 admite primitive.