# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

***Varianta* …088**

**Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică**

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

## SUBIECTUL I ( 20p )

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3-i}{3+i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,0,1)$ la planul $3x+2y+z+4=0$.

(4p) **c)** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât punctul $P(a,2)$ să se afle pe elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ .

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2,3)$, $M(2,3,4)$ și $N(3,4,5)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze cosinusul unghiului format de vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}$ și $\vec{w}=3\vec{i}+7\vec{j}$ .

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\left(\cos1^\circ+i\sin1^\circ\right)^{180}=a+bi\ .$$

## SUBIECTUL II ( 30p )

**1.**

(3p) **a)** Să se calculeze expresia $C_{10}^0+C_{10}^2+C_{10}^4+...+C_{10}^{10}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n\in\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $2^n+3^n>5^n$ .

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x+2$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(5)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3+3x-4=0$ .

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f=X^3+X^2+X\in\mathbf{C}[\mathbf{X}]$ .

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+\sin x-\cos x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ .

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1\frac{x^3}{4x^4+5}\,dx$.

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z_2})$ se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$

şi submulțimea $N = \{X \in M_2(\mathbf{Z_2}) \mid X^2 = O_2\}$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $O_2 \in N$ şi $A \in N$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că $I_2 \notin N$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $B \in N$, $B = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$, atunci $\hat{a} + \hat{d} = \hat{0}$ şi $\hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c} = \hat{0}$.

(2p) **d)** Să se găsească o matrice $C \in M_2(\mathbf{Z_2})$ cu proprietățile $\det(C) = \hat{0}$ şi $C \notin N$.

(2p) **e)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $M_2(\mathbf{Z_2})$.

(2p) **f)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $N$.

(2p) **g)** Să se găsească o matrice $X \in M_2(\mathbf{Z_2})$ care **nu** se scrie ca o sumă de elemente din mulțimea $N$.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ şi $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(0)$ şi $F(0)$.

(4p) **b)** Să se verifice că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția $F$ este convexă pe intervalul $[0, \infty)$ şi este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $F(-x) = -F(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că $\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty$

(2p) **f)** Să se arate funcția $F$ este bijectivă.

Notăm cu $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, inversa funcției $F$ şi cu $a = g(1)$.

(2p) **g)** Să se arate că $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(a) - 1)$.