EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….091

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sin 1 - i\cos 1$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(4,3,2)$ la planul $x+2y+3z+6=0$ **.**

(4p) **c)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}$

(4p) **d)** Să se arate că $\sin 1 > \cos 1$.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(0,1,2)$, $B(1,2,0)$, $C(2,0,1)$ şi $D(4,3,2)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(-1+i)^{12}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $\log_3 4 > \log_4 3$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z}_{12}$ să verifice relația $\hat{x}^2=\hat{1}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x^3+x+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(5)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+2\cdot 9^x=3$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\sqrt{110}$ cu o zecimală exactă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^x-x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a,b,c \in \mathbf{R}$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$. Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $S_0 = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ şi $\Delta = \det(A \cdot A^T)$, unde prin A^T am notat transpusa matricei A.

(4p) **a)** Să se arate că $det(A) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

(4p) **b)** Să se verifice că $S_1 = -a$ şi $S_2 = a^2 - 2b$.

(4p) **c)** Să se arate că, $S_{n+3} + aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

(2p) **d)** Să se calculeze S_3 şi S_4 în funcţie de a, b şi c .

(2p) **e)** Să se verifice că $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}$.

(2p) **f)** Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$ în funcţie de a, b şi c .

(2p) **g)** Ştiind că $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in M_3(\mathbf{C})$, să se arate că $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ dacă şi numai dacă $\Delta \geq 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^a$, unde $a \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

(4p) **b)** Utilizând teorema lui *Lagrange* , să se arate că există $c(a)$ (care depinde de a), $c(a) \in (17,19)$ şi $d(a)$ (care depinde de a), $d(a) \in (1974,1976)$, astfel încât $19^a - 17^a = 2a(c(a))^{a-1}$ şi $1976^a - 1974^a = 2a(d(a))^{a-1}$.

(2p) **c)** Să se arate că pentru orice funcţii $g : \mathbf{R} \to (17,19)$ şi $h : \mathbf{R} \to (1974,1976)$, ecuaţia $x(g(x))^{x-1} = x(h(x))^{x-1}$ are numai soluţiile $x = 0$ şi $x = 1$.

(2p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $17^x + 1976^x = 19^x + 1974^x$.

(4p) **e)** Să se arate că $\sqrt{19} + \sqrt{1974} > \sqrt{17} + \sqrt{1976}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\dfrac{18}{ln19} + \dfrac{1973}{ln1974} > \dfrac{16}{ln17} + \dfrac{1975}{ln1976}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\dfrac{18 \cdot 19}{ln19} + \dfrac{1973 \cdot 1974}{ln1974} < \dfrac{16 \cdot 17}{ln17} + \dfrac{1975 \cdot 1976}{ln1976}$.