EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.092**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele $y = 2x + 1$ şi $y = ax + 5$ să fie paralele.

(4p) **b)** Să se determine valoarea numărului $\cos^2 2007\pi - \sin^2 2007\pi$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația cercului care are pe AB diametru unde $A(-4, 0)$ şi $B(4,4)$.

(4p) **d)** Să se determine numerele reale a şi b astfel încât vectorii $\vec{v} = \vec{i} + a\vec{j} + \vec{k}$ şi $\vec{w} = b\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ să fie coliniari.

(2p) **e)** Să se determine modulul numărului complex $(1+i)^8$.

(2p) **f)** Să se determine aria triunghiului ABC cu lungimile laturilor de 5,6,7.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze media aritmetică a elementelor mulțimii $P = \{11, 12, 13, ..., 18\}$.

(3p) **b)** Să se determine câte progresii aritmetice de trei elemente cu rația strict pozitivă se pot forma cu elementele mulțimii $P = \{11, 12, 13, ..., 18\}$.

(3p) **c)** Să se afle câte numere naturale satisfac relația $n^2 - 6n + 5 \le 0$.

(3p) **d)** Să se determine câtul împărțirii polinomului $f = X^6 - 1$ la polinomul $g = X^2 + X + 1$.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $3^n > 4n + 5$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x}$.

(3p) **c)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze valoarea minimă a funcției f pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se determine $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{e^n} \displaystyle\int_0^n f(t)\, dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbf{R}, \;\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$, matricele

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se arate că $I_2 \in G$ și $M(x) \in G$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $A, B \in G$ atunci $A \cdot B \in G$.

(4p) **c)** Să se arate că $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$ pentru orice $A, B \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$, atunci matricea A este inversabilă şi $A^{-1} = 2aI_2 - A$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $A \in G$, atunci există $x \in [0, 2\pi)$ astfel încât $A = M(x)$.

(2p) **f)** Utilizând formulele $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ şi $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, să se calculeze $M^n(x)$, $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că există o matrice $A \in G$ astfel încât mulțimea $G(A) = \left\{ A^n \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^* \right\}$ să fie infinită.

SUBIECTUL IV (20p)

Fie şirurile $(I_n)_{n \geq 0}$, $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n} x\, dx$,

$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze I_0 şi I_1.

(4p) **b)** Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

(4p) **c)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este monoton şi mărginit .

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} I_n$.

(2p) **e)** Să se arate că $a_n = I_0 + (-1)^{n-1} I_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} (-1)^n n \cdot \left(\frac{\pi}{4} - a_n \right)$.