EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….098**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine distanța dintre punctele $A(2,-1,0)$ și $B(-1,1,2)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $1-\cos 2007\pi$.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale elipsei $2x^2+3y^2-5=0$ cu dreapta $x=y$.

(4p) **d)** Să se determine $\vec{v}+\vec{w}$ dacă $\vec{v}=3\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}, \vec{w}=-3\vec{i}+7\vec{j}-2\vec{k}.$

(2p) **e)** Să se determine conjugatul numărului complex $20+30i$.

(2p) **f)** Să se determine aria unui triunghi având perimetrul egal cu 18 şi lungimea razei cercului înscris egală cu $\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine suma $x_1+x_2+x_3+x_4$, unde x_1,x_2,x_3,x_4 reprezintă rădăcinile polinomului $f=X^4+X^2+1$.

(3p) **b)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este $f(x)=x^3-1$ se determine $(f\circ f)(1)$.

(3p) **c)** Să se arate că numărul lg2+lg5 este natural .

(3p) **d)** Să se determine soluția reală a ecuației $x^3=27$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1,2,...,26\}$ să fie par.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{2007}$.

(3p) **a)** Să se determine $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției *f*.

(3p) **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției *f*.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2008}}\int_0^n f(x)\,dx$

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Z}\right\}$, care împreună cu operațiile de adunare și înmulțire uzuale are structura algebrică de inel și funcția $f:\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]\to\mathbf{Z}$, $f\left(a+b\sqrt{2}\right)=a^2-2b^2$, $a,b\in\mathbf{Z}$.

(4p) **a)** Să se arate că $f(x\cdot y)=f(x)f(y)$, $\forall\, x,y\in\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(x)=0$ dacă şi numai dacă $x=0$.

(4p) **c)** Să se verifice că $f\left(1+\sqrt{2}\right)=-1$.

(2p) **d)** Să se arate că mulțimea $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]\mid f(x)=1\right\}$ conține cel puțin 2007 elemente.

(2p) **e)** Să se arate că mulțimea $B=\left\{x\in\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]\mid f(x)=-1\right\}$ conține cel puțin 2007 elemente.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $a+b\sqrt{2}\neq 0$, $a,b\in\mathbf{Z}$, atunci $\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(a'+b'\sqrt{2}\right)=1$, unde $a'=\dfrac{a}{a^2-2b^2}$, $b'=\dfrac{-b}{a^2-2b^2}$.

(2p) **g)** Să se arate că mulțimea elementelor inversabile din inelul $\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ este $C=A\cup B$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$ și șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n=\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\frac{|\sin(nx)|}{x}dx$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $\dfrac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\dfrac{1}{k}$, $\forall k\in(0,\infty)$.

(4p) **c)** Utilizând metoda schimbării de variabilă, să se arate că $x_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Utilizând inegalitățile de la punctul **b)**, să se arate că

$$\ln(2n+1)-\ln(n+1)<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}<\ln 2,\ \forall\, n\in\mathbf{N}^*.$$

(2p) **e)** Să se arate că $x_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}dt+\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(n+1)\pi+t}dt+\ldots+\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(2n-1)\pi+t}dt$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)\leq x_n\leq\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}\right)$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.