EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta **….006**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $(2+3i)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea medianei din B în triunghiul ABC, unde $A(3,2)$, $B(-2,3)$ și $C(5,0)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

(4p) **d)** Să se determine lungimea înălțimii din A în triunghiul ABC, dacă $AB=6$, $AC=8$ și $BC=10$.

(2p) **e)** Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(3,2)$, $B(2,\alpha)$ și $C(4,3)$ să fie coliniare.

(2p) **f)** Să se scrie ecuația tangentei la cercul de ecuație $x^2+y^2=9$ în punctul $P(0,-3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine $\hat{x}\in\mathbf{Z}_5$ dacă $\hat{2}\hat{x}+\hat{4}=\hat{3}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\log_3 2+\log_3 12-\log_3 8$.

(3p) **d)** Să se rezolve în intervalul $[-1,\infty)$ ecuația $\sqrt{x+1}=3$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^n<10$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+f(0)}{5n^2-f(0)}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A+I_2=B$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei B.

(4p) **c)** Să se verifice că $A^2=A$.

(2p) **d)** Să se calculeze A^{2007}.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $B^n=I_2+(2^n-1)A$, $\forall\ n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $aA+bB+cI_2\neq C$, $\forall a,b,c\in\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că matricea $X=A^n+B^n$ este inversabilă $\forall\ n\in\mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^{1-x^2}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $x\in[1,2]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\geq 0$.

(4p) **c)** Utilizând eventual inegalitatea de la punctul **b)**, să se arate că, dacă $x\in[1,2]$, atunci $\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\leq\frac{3}{2}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{2}\leq\frac{3}{2}$, $\forall x\in[0,1]$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $u,v\in\mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2\geq 4uv$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la puncul **d)**, să se arate că

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{3}{2}.$$

(2p) **g)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că

$$\left(\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\right)\cdot\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\leq\frac{9}{8}.$$