EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta** …*.**007**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1,3)$ şi $B(-1, 2)$.

(4p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului ABC care are vârfurile $A(1,3)$, $B(-1, 2)$ şi $C(3,5)$.

(4p) **c)** Să se scrie ecuația cercului cu centrul în punctul $A(1,3)$ şi raza 5 .

(4p) **d)** Să se calculeze $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 0+\sin\frac{\pi}{2}$.

(2p) **e)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{v_1}\left(1,\sqrt{2}\right)$ şi $\overrightarrow{v_2}\left(\sqrt{2},-1\right)$.

(2p) **f)** Să se calculeze modulul numărului complex $(1-2i)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f(x)=0$.

(3p) **b)** Dacă $A=\{0,1,2,3,4\}$, să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n din mulțimea A, numărul $f(n)$ să fie divizibil cu 3.

(3p) **c)** Să se calculeze $(f\circ f)(1)$.

(3p) **d)** Să se determine numărul real k astfel încât $f(x)=k(x-1)(x-2)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se demonstreze că $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right), \forall x\in\mathbf{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\cdot e^x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f.

(3p) **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbf{Z} \text{ si } a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $1 \in M$ şi $0 \notin M$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că dacă $x, y \in M$ atunci $x \cdot y \in M$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că dacă $x \in M$ atunci $x \neq 0$ și $\frac{1}{x} \in M$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că mulțimea M formează o structură de grup comutativ în raport cu înmulțirea numerelor reale.

(2p) **e)** Să se dea un exemplu de element $x = a + b\sqrt{2} \in M$, cu $b > 1$.

(2p) **f)** Fie $x = a + b\sqrt{2} \in M$ cu $a > 1$ și $b > 1$. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbf{N}$, $a_n > 1$, $b_n > 1$, astfel încât $x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că M conține cel puțin 2007 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - 1 - x \cdot \ln x$ și $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(x) \leq 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$

(4p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

(2p) **e)** Să se calculeze $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(2p) **f)** Folosind eventual punctul **b)** și notația $1 + 2x = t$, să se arate că funcția g este descrescătoare pe $(1, \infty)$.

(2p) **g)** Să se arate că $\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}} > \left(1 + 2\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$.