EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….014**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$.

(4p) **b)** Să se determine soluțiile ecuației $\cos x = 0$ situate în intervalul $[0,\pi]$.

(4p) **c)** Să se calculeze modulul numărului complex $\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{49}$.

(4p) **d)** Să se afle coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$, unde $A(3,-4)$ și $B(1,2)$.

(2p) **e)** Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$, unde $A(3,-4)$ și $B(1,2)$.

(2p) **f)** Să se afle lungimea medianei din A a triunghiului ABC cu laturile $AB=3, AC=4, BC=5$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze a_{15}, dacă primii doi termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ sunt $a_1=1$, $a_2=\frac{3}{2}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{-1,0,1,2\}$ să fie soluție a ecuației $\begin{vmatrix} x & 0 \\ 8 & x+1 \end{vmatrix}=0.$

(3p) **c)** Să se afle câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{3,5,7\}$.

(3p) **d)** Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x-2$, să se calculeze $(f\circ f)(1)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $f(i)$, unde $f\in\mathbf{C}[X],\ f=X^4+X^3+X^2+X+1.$

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln x - x.$

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty).$

(3p) **b)** Să se determine punctul de extrem local al funcției f.

(3p) **c)** Să se arate că f este concavă pe $(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră submulțimea $M=\left\{A=\begin{pmatrix} z & u \\ -\overline{u} & \overline{z}\end{pmatrix} \middle| z,u\in\mathbf{C}\right\}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex z şi matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se arate că $I_2\in M$ şi $O_2\in M$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că $\overline{\overline{z}}=z, (\forall)z\in\mathbf{C}$

(4p) **c)** Să se demonstreze că $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ şi $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $(\forall)z_1,z_2\in\mathbf{C}$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$ şi $A\cdot B\in M$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\det(A)\in\mathbf{R}, \forall A\in M$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\begin{pmatrix} z & 0\\ 0 & \overline{z}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} z^n & 0\\ 0 & \overline{z}^n\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se rezolve în $M_2(\mathbf{R})$ ecuația $\begin{pmatrix} z & 0\\ 0 & \overline{z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} z & 0\\ 0 & \overline{z}\end{pmatrix}^2+\ldots+\begin{pmatrix} z & 0\\ 0 & \overline{z}\end{pmatrix}^{2007}=O_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{e-1}{e^{x+1}}$ şi se defineşte şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

(4p) **a)** Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{e^{x+1}}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

(4p) **c)** Să se arate că $f'(x)=-f(x), \forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $a_n=\dfrac{1}{e}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right), (\forall)n\in\mathbf{N}, n\geq 1$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) **f)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

(2p) **g)** Utilizând eventual rezultatul de la punctul **c)**, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+\int_1^n f(x)\,dx\right)$.