EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….016**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = i + i^2 + ... + i^7$.

(4p) **b)** Să se afle partea reală a numărului complex $\frac{1}{1+i}$.

(4p) **c)** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului cu vârfurile $A(3;0), B(0;3), C(3;3)$.

(4p) **d)** Să se afle volumul unui cub cu diagonala de lungime $\sqrt{12}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2}$.

(2p) **f)** Să se determine ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$, unde $A(4;3)$ și $B(-4;3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $g(3)$, unde funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este inversa funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = 2x+3$.

(3p) **b)** Să se calculeze suma $C_8^0 + C_8^1 + ... + C_8^8$.

(3p) **c)** Să se afle produsul elementelor inversabile față de înmulțire ale inelului $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$.

(3p) **d)** Să se determine probabilitatea ca un element al mulțimii $\{2;4\}$ să fie soluție a ecuației $\log_2(4x-4) = 2$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^4 - 7X^2 + 3 \in \mathbf{C}[X]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

(3p) **a)** Să se arate că $f(x) = x + \frac{1}{x}, x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

(3p) **e)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ -1 & -\omega^2 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbf{C})$, unde ω este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ şi funcția $f : M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C}),\ f(X) = X^2 - 3X$.

(4p) **a)** Să se arate că $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1, \forall x \in \mathbf{C}$.

(4p) **b)** Să se arate că $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ şi că $\omega^3 = 1$.

(4p) **c)** Să se determine matricea A^2.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că matricea $(I_2 + A)$ este inversabilă şi să se afle inversa ei.

(2p) **f)** Să se calculeze rangul matricei $B = A + A^2 + A^3 + ... + A^{2007}$.

(2p) **g)** Să se calculeze $f(B)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \text{arctg} x$ şi $g(x) = f(x) - \ln(1 + x^2)$ şi se defineşte şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, $\forall n \geq 1$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ \forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $g'(x),\ \forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că f nu are puncte de extrem local, iar g are un singur punct de extrem local.

(2p) **d)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(2p) **g)** Să se arate că $\int_0^1 g(x)\,dx \leq \text{arctg}\frac{1}{2} - \ln\frac{5}{4}$.