EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta** …*.**024**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,-2,3)$ la punctul $E(0,1,2)$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $x^2 - 4y^2 = 12$ în punctul $P(-4,1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(4, 2)$, $M(3, 3)$ şi $N(2, 4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se dea un exemplu de număr natural n pentru care $\sin\frac{n\pi}{6} = 1$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1,\ 2)$ și $C(2,\ 1)$ să aparțină dreptei $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze suma $2 + 4 + 6 + ... + 20$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z_6}$ să verifice egalitatea $\hat{3}\hat{x} = \hat{0}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$ are inversa $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x^2 + 7) = \log_2(x^4 + 8)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X$.

2.

(3p) **a)** Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă, astfel încât $f'(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se găsească o funcție continuă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neconstantă, astfel încât $\int_0^1 g(x)dx = 2007$.

(3p) **c)** Să se găsească o funcție $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ concavă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se găsească o funcție $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi submulțimea

$G=\{X\in M_2(\mathbf{C})\ |AX=XA\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A\in G$ şi $I_2\in G$.

(4p) **b)** Să se găsească o matrice $T\in M_2(\mathbf{C})$ cu proprietatea $T\notin G$.

(4p) **c)** Să se verifice că $A^2=-I_2$.

(2p) **d)** Să se arate că $A^2X=XA^2$, $\forall X\in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $a,b\in\mathbf{C}$, atunci matricea $aI_2+bA\in G$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $Y\in G$, atunci există $x,y\in\mathbf{C}$ astfel încât $Y=xI_2+yA$.

(2p) **g)** Să se arate că matricea A^n este inversabilă oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\ln a-a\ln x$, unde $a\in\mathbf{R}$, $a>0$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x), x>0$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f(a)$ şi $f'(a)$.

(4p) **c)** Utilizând teorema lui *Fermat*, să se determine $a>0$ astfel încât

$f(x)\geq 0$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că $e^x\geq x^e$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că $\int_0^1 e^x dx\geq\int_0^1 x^e dx$.

(2p) **f)** Să se arate că pentru $x>0$, avem $e^x=x^e$ dacă şi numai dacă $x=e$.

(2p) **g)** Să se determine numerele reale $c,b>0$ cu proprietatea că

$c^x+b^x\geq x^c+x^b$, $\forall x\in(0,\infty)$.