# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

***Varianta* ….030**

**Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările**

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

## SUBIECTUL I ( 20p )

Se consideră mulțimea $M=\{\sin\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{5},\sin\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{2},\sin\pi\}$.

**(4p)** **a)** Să se determine cel mai mare element al mulțimii $M$.

**(4p)** **b)** Să se scrie ecuația unei drepte perpendiculare pe dreapta de ecuație $y=\sin\frac{\pi}{6}$.

**(4p)** **c)** Să se determine $x\in M$ pentru care $2x=\sqrt{2}$.

**(4p)** **d)** Să se calculeze produsul elementelor mulțimii $M$.

**(2p)** **e)** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{\pi}{5}$.

**(2p)** **f)** Să se găsească două numere $a,b\in M$ pentru care $a+b\in\mathbf{Q}$.

## SUBIECTUL II ( 30p )

**1.** Se consideră pe $\mathbf{R}$ legea de compoziție "$\perp$" definită prin

$$x\perp y=4xy-2x-2y+\frac{3}{2},\ \forall x,y\in\mathbf{R}.$$

**(3p)** **a)** Să se calculeze $2\perp\frac{3}{4}$.

**(3p)** **b)** Să se determine elementul neutru al legii "$\perp$".

**(3p)** **c)** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ pentru care $x\perp y=(2x-1)\cdot(2y-1)+a$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.

**(3p)** **d)** Să se determine $x\in\mathbf{R}$ pentru care $(2^x)\perp(4^x)=\frac{1}{2}$.

**(3p)** **e)** Să se calculeze $\log_2 8$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+1}$.

**(3p)** **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

**(3p)** **b)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

**(3p)** **c)** Să se determine câte puncte de extrem local are funcția considerată.

**(3p)** **d)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**(3p)** **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Pentru o matrice $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ se notează cu $A^* = \begin{pmatrix} q & -n \\ -p & m \end{pmatrix}$ matricea sa reciprocă (sau adjunctă). Se consideră matricele $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\det(B)$.

(4p) **b)** Să se determine $r \in \mathbf{R}$ pentru care $B \cdot B^* = r \cdot E$.

(4p) **c)** Să se calculeze $B^2$.

(2p) **d)** Să se arate că $B^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $\det(E + \det(E) \cdot E^*) = 4$.

(2p) **f)** Să se determine numerele întregi $s$ pentru care $\det(B + s \cdot B^*) = 4$.

(2p) **g)** Să se determine $u, v \in \mathbf{R}$ astfel încât $u \cdot B + v \cdot B^* = 4E$.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = f(x) - g(x)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției $f$.

(4p) **c)** Să se arate că $g$ este concavă pe $(0, \infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că există $p \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) + g'(x) = p$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că funcția $h$ are un singur punct de extrem.

(2p) **f)** Să se arate că $1 + x \cdot \ln x \geq x$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(2p) **g)** Să se arate că $\int_1^2 g(x)dx \geq 1 - \ln 2$.