EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….035**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $a+2b$ dacă punctul $M(a,b)$ aparține dreptei de ecuație $2x+4y-5=0$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea razei cercului de ecuație $x^2+y^2-2y=0$.

(4p) **c)** Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\left\{\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{2},\cos\frac{2\pi}{3}\right\}$.

(4p) **d)** Să se dea un exemplu de număr complex nereal care are modulul $\sqrt{10}$.

(2p) **e)** Să se calculeze produsul $\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{2}$.

(2p) **f)** Să se calculeze partea reală a numărului $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine simetricul față de înmulțire al elementului $\hat{7}\in\mathbf{Z}_8$.

(3p) **b)** Să se calculeze suma $\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}$ în grupul $(\mathbf{Z}_8,+)$.

(3p) **c)** Să se determine $x\in\mathbf{Q}$ pentru care $4^x=8$.

(3p) **d)** Să se determine restul împărțirii polinomului $f=X^3-2X+3$ la polinomul $g=X-1$.

(3p) **e)** Să se calculeze în câte moduri se poate alcătui o echipă formată din 4 persoane dintr-un grup format din 5 persoane.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{2007}$.

(3p) **a)** Să se determine $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine cel mai mare dintre numerele $a=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ şi $b=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{f(x)}$.

SUBIECTUL III (20p)

În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se arate că $\det(A) = \det(B)$.

(4p) **b)** Să se arate că $\text{rang}(B) > \text{rang}(C)$.

(4p) **c)** Să se arate că există o singură matrice $X \in M_2(\mathbf{R})$, pentru care $X \cdot A = C$.

(2p) **d)** Să se găsească două matrice diferite $Y, Z \in M_2(\mathbf{R}), Y, Z \neq O_2$ pentru care $C \cdot Y = C \cdot Z = O_2$.

(2p) **e)** Să se arate că există cel puțin 2007 de perechi (m, n) de numere naturale pentru care $A^m = B^n$.

(2p) **f)** Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

(2p) **g)** Să se determine toate numerele $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C = O_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot \cos x - \sin x$ şi $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$.

(4p) **b)** Să se arate că f este strict descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(4p) **c)** Să se determine $g'(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2p) **d)** Folosind eventual **b)** şi **c)**, să se arate că g este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

(2p) **g)** Să se arate că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx \geq \frac{2}{3}$.