EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta** ….046*

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine conjugatul numărului complex $z = 2007i$.

(4p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile $A(6;0), B(0;8), C(6;8)$.

(4p) **c)** Să se determine lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic având catetele de lungime 6, respectiv 8.

(4p) **d)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{3+i}{3-i}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{9\pi}{4}$.

(2p) **f)** Să se determine ecuația tangentei în punctul $A(-1;0)$ la hiperbola de ecuație $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se găsească soluțiile reale ale ecuației $3^{x^2+x} = 9$.

(3p) **b)** Să se afle în câte moduri pot fi alese două persoane dintr-un grup de cinci persoane.

(3p) **c)** Să se arate că numărul $\log_2 3 + \log_2 48 - \log_2 18$ este natural.

(3p) **d)** Să se calculeze restul împărțirii polinomului $f = X^3 + X - 2$ la polinomul $g = X - 1$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{-3;1;4;6\}$ să fie termen al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = 2n - 7$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^{2007} + x$.

(3p) **a)** Să se demonstreze că $f(-x) = -f(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

(3p) **d)** Să se demonstreze că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră submulțimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix} \middle| \, x \in (0,\infty) \right\}$ şi funcția

$f: M \to (0;+\infty)$, $f(A(x)) = x$.

(4p) **a)** Să se arate că $A(x) = A(y)$ dacă şi numai dacă $x = y$, $x, y \in (0;+\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$, $\forall\ A(x), A(y) \in M$.

(4p) **c)** Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$, $\forall A(x), A(y) \in M$.

(2p) **d)** Să se arate că $\exists\ A(e) \in M$, astfel încât $A(x) \cdot A(e) = A(e) \cdot A(x) = A(x)$, $\forall A(x) \in M$.

(2p) **e)** Să se arate că pentru $\forall A(x) \in M$, $\exists A(x') \in M$ astfel încât

$A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(e)$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice , să se arate că

$A^n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^n - 1 & x^n \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$

(2p) **g)** Să se demonstreze că funcția f este bijectivă şi că $f(A(x) \cdot A(y)) = f(A(x)) \cdot f(A(y))$,

$\forall A(x), A(y) \in M$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ şi $g(x) = \ln(1+x^2)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(0)$ şi $g(0)$.

(4p) **b)** Să se arate că $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $g'(x) = 2f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor f şi g.

(2p) **d)** Să se găsească ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $f(x) \leq 0$, $\forall x \in (-\infty;0]$ şi $g(x) \geq 0$, $\forall x \in (-\infty;0]$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \ln(1+x^2)$, $\forall x \in (-\infty;0]$.

(2p) **g)** Folosind eventual rezultatul de la punctul anterior, să se demonstreze că

$\int_{-1}^{0} \ln(1+x^2)dx \geq -\dfrac{1}{2}\ln 2$.