EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….050**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n,1)$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $O(0,0)$.

(4p) **a)** Să se determine panta dreptei OA_1.

(4p) **b)** Să se arate că punctele A_0 și A_1 aparțin dreptei de ecuație $y = 1$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1.

(4p) **d)** Să se calculeze lungimea segmentului $[OA_n]$, $n \in \mathbf{N}$.

(2p) **e)** Să se determine numărul dreptelor determinate de punctele mulțimii $\{O, A_0, A_1, ..., A_{10}\}$.

(2p) **f)** Să se determine numărul triunghiurilor care au vârfurile în câte 3 puncte din mulțimea $\{O, A_0, A_1, ..., A_{10}\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze numărul de mulțimi X care verifică relația $X \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(3p) **c)** Să se calculeze matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2007}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor raționale ecuația $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, să verifice relația $n^2 - 2n \geq 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)} dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \mid f(x)=ax+1-a,\ a\in\mathbf{R}^*\}$ şi funcția $1_{\mathbf{R}}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $1_{\mathbf{R}}(x)=x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se arate că dacă $f,g\in G$, atunci $f\circ g\in G$.

(4p) **b)** Să se arate că $1_{\mathbf{R}}\in G$.

(4p) **c)** Să se arate că $f\circ 1_{\mathbf{R}}=1_{\mathbf{R}}\circ f=f$, $\forall f\in G$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $f\in G$, $f(x)=ax+1-a$ şi $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\dfrac{x-1+a}{a}$, atunci $g\in G$ şi $f\circ g=g\circ f=1_{\mathbf{R}}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $1_{\mathbf{R}}(1)+1_{\mathbf{R}}(2)+...+1_{\mathbf{R}}(100)$.

(2p) **f)** Să se calculeze $h\circ h\circ h$, unde $h\in G$, $h(x)=2x-1$.

(2p) **g)** Să se arate că mulțimea G, împreună cu operația de compunere a funcțiilor, formează o structură de grup comutativ.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ şi se defineşte şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\int f(x)dx$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

(2p) **e)** Să se arate că $\dfrac{1}{(k+1)^3}<\dfrac{1}{2k^2}-\dfrac{1}{2(k+1)^2}$, $\forall k>0$.

(2p) **f)** Să se arate că $1{,}15\le a_n$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $n\ge 4$.

(2p) **g)** Să se arate că $a_n\le 1{,}21$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.