EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….051**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine numerele reale a și b dacă dreptele $d_1 : y = ax + b$ și $d_2 : y = bx - a$ trec prin punctul $A(1,1)$.

(4p) **b)** Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral dacă aria sa este egală cu 3.

(4p) **c)** Să se dea exemplu de un număr complex nereal care are modulul egal cu 3.

(4p) **d)** Să se găsească un număr natural n pentru care $i^n + i^{n+1} = 1 - i$, unde $i^2 = -1$.

(2p) **e)** Să se dea un exemplu de două numere reale x și y pentru care $\cos(x + y) = 0$.

(2p) **f)** Să se găsească două elemente ale mulțimii $M = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = \sin 2x\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se demonstreze egalitatea $C_{x+1}^{y+1} = \dfrac{x+1}{y+1} C_x^y$, $\forall\, x, y \in \mathbf{N}^*, x \geq y$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z_8}$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 10$, are inversa $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, să se calculeze $g(11)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x = 8^x$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 - 2X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^8 + 1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 (e^x + \sin x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulțimea

$G=\{X\in M_2(\mathbf{C})\ |AX=XA\}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se verifice că $I_2\in G$ şi $A\in G$.

(4p) **c)** Să se calculeze matricea A^2.

(2p) **d)** Să se arate că $XA^2=A^2X$, $\forall X\in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $B\in M_2(\mathbf{C})$ cu proprietatea că $AB\neq BA$.

(2p) **f)** Să se arate că , dacă $a,b\in\mathbf{C}$, atunci $aI_2+bA\in G$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $X\in G$, atunci există $x,y\in\mathbf{C}$ astfel încât $X=xI_2+yA$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=e^x\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_1'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f_n'(x)=f_{n+1}(x)$, $\forall n\in\mathbf{N}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $f_n(0)$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3},\ \forall n\in\mathbf{N}, n\geq 2.$$

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(0)+f_2(0)+\ldots+f_n(0)}{n^3}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\int_0^1 f_0(x)dx$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.