EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

Varianta ….053

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi 6 şi 8.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(3,3)$ şi $C(4,4)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}$.

(4p) **d)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3,3)$ şi $C(4,4)$ să aparțină dreptei de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A(3,3)$, $B(3,2)$ şi $C(4,4)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe

$$\frac{2+i}{i-2}=a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $x^2+4x-10=0$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\frac{C_5^2}{C_5^3}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5(x+1)=\log_5(x^2+x)$.

(3p) **d)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $10^x=100$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $n!\geq 20$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că $f(x)\geq f(0)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} x\cdot f'(x)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in \mathbf{Z}\right\}$. Se notează cu F mulțimea funcțiilor $f:\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]\to \mathbf{R}$ crescătoare, care verifică $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall\, x,y\in \mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

(4p) **a)** Să se arate că dacă $x,y\in \mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, atunci $x+y\in \mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $g:\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]\to \mathbf{R}$, $g(x)=tx$, cu $t\in[0,\infty)$ atunci $g\in F$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $f\in F$, atunci $f(0)=0$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $f\in F$, atunci $f(n)=n\cdot f(1),\ \forall\, n\in \mathbf{N}$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $f\in F$ şi $a,b\in \mathbf{Z}$, atunci $f\left(a+b\sqrt{2}\right)=af(1)+bf\left(\sqrt{2}\right)$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $f(1)=t\in \mathbf{R}$ şi $f\in F$, atunci $t\geq 0$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $f\in F$ şi $f\left(\sqrt{2}\right)=0$, atunci $f(x)=0,\ \forall\, x\in \mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbf{R}\to \mathbf{R}$, $f_0(x)=e^{2x}$ şi $f_{n+1}(x)=f_n'(x),\ \forall\, x\in \mathbf{R},\ \forall\, n\in \mathbf{N}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_1(x),\ x\in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f_0.

(4p) **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x)=2^n e^{2x}$,

$\forall\, n\in \mathbf{N},\ \forall\, x\in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se calculeze $f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0),\ n\in \mathbf{N}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)}{f_{n+1}(x)},\ x\in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f_n(t)\,dt}{f_n(x)},\ n\in \mathbf{N}$.

(2p) **g)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f_0(x)+f_1(x)=3$.