EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….076**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2;1)$ și $B(3,4)$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$.

(4p) **c)** Să se scrie ecuația dreptei AB.

(4p) **d)** Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

(2p) **e)** Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.

(2p) **f)** Să se scrie ecuația tangentei la cercul de diametru $[AB]$ în punctul A.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine soluțiile ecuației $2^{2x} - 3\cdot 2^{x} + 2 = 0$.

(3p) **b)** Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție "$\circ$" prin $x \circ y = 2xy + x + y + 1$.
Să se arate că $\exists x, y \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$ astfel încât $x \circ y \in \mathbf{Z}$.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} - 6 = 0$.

(3p) **d)** Să se calculeze suma $2 + 4 + 6 + \ldots + 24 + 26$.

(3p) **e)** Să se determine soluțiile ecuației $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{4}$ în inelul $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x - 4$

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(2n)}{f(n)}$.

(3p) **d)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbf{R}\right\}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se arate că $I_3\in G$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\det A(0)$.

(4p) **c)** Să se arate că $A(2)$ este inversabilă şi să se calculeze inversa acesteia.

(2p) **d)** Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, $\forall A(x),A(y)\in G$.

(2p) **e)** Să se arate că $\forall A(x)\in G$, $\exists A(x')\in G$ astfel încât $A(x)\cdot A(x')=I_3$.

(2p) **f)** Să se calculeze $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2007)$.

(2p) **g)** Să se arate că $A^n(x)=A(nx)$, $\forall n\in\mathbf{N}, n\geq 1$, $\forall A(x)\in G$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbf{R}^*$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $[2,+\infty)$.

(2p) **d)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall n\in\mathbf{N}, n\geq 1.$$

(2p) **f)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(1,0)$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'\left(\frac{1}{1}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+f'\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3}$.