EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….081**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi 6 şi 8.

(4p) **b)** Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC}$, unde $A(3,3)$ şi $C(4,4)$.

(4p) **c)** Să se determine partea reală a numărului complex $(2+3i)(3-2i)$.

(4p) **d)** Să se determine punctul de intersecție al dreptelor $d_1: x+2y-4=0$ şi $d_2: x+y-3=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze lungimea înălțimii din C a triunghiului ABC cu vârfurile în punctele $A(3,3)$, $B(3,5)$ şi $C(4,4)$.

(2p) **f)** Să se dea un exemplu de număr natural n pentru care $\cos\frac{n\pi}{12}=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze suma rădăcinilor ecuației $\hat{2}\hat{x}=\hat{4}$ în $\mathbf{Z_8}$.

(3p) **b)** Să se calculeze câte submulțimi cu cel mult două elemente are mulțimea $\{2,4,6\}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5(x+1)=\log_5(x^2+x)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $10^x=5^x$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $n!\geq 20$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că $f(x)\geq f(0)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se determine punctele de inflexiune ale funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n!}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi submulțimea

$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, c \in (0, \infty), b \in \mathbf{R} \right\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_2 \in G$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul matricei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

(2p) **d)** Să se verifice că, dacă $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$, atunci matricea $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G$ şi

$C \cdot D = D \cdot C = I_2$.

(2p) **e)** Să se găsească două matrice $U, V \in G$ pentru care $U \cdot V \neq V \cdot U$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$, $\forall a, c \in (0, \infty)$

şi $\forall b \in \mathbf{R}$ are loc $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b\left(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1}\right) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$.

(2p) **g)** Să se arate că, $\forall A \in G$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, există $X \in G$ astfel încât $X^n = A$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția f este convexă pe intervalul $[0, \infty)$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **f)** Să se arate că $\int_0^x a^t dt = \frac{a^x - 1}{\ln a}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$.

(2p) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$.