EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta ….**089**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

Se consideră triunghiul echilateral *ABC* cu latura de lungime 10.

(4p) **a)** Să se determine cosinusul unghiului $B\hat{A}C$.

(4p) **b)** Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria triunghiului *ABC*.

(4p) **d)** Să se determine lungimea înălțimii triunghiului *ABC*.

(2p) **e)** Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{AD}$ dacă $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

(2p) **f)** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului *ABC*.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine restul împărțirii polinomului $f=2X^3+X^2+1$ la polinomul $X+2$.

(3p) **b)** Să se arate că numărul complex *i* este rădăcină a polinomului $f\in\mathbf{C}[\mathbf{X}]$, $f=X^{2007}+X$.

(3p) **c)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}$.

(3p) **d)** Să se determine rangul matricei $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

(3p) **e)** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

2. Se consideră funcția $f:(-\infty;-1]\cup[1;\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(3p) **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

(3p) **c)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_2^{\sqrt{10}}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcțiile $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_a(x) = x + a$, $a \in \mathbf{R}$, mulțimea $G = \{f_a | a \in \mathbf{R}\}$ şi funcția $g : G \to \mathbf{R}$, $g(f_a) = a$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $f_a \circ f_b = f_{a+b}$, $\forall f_a, f_b \in G$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că $f_a \circ f_0 = f_0 \circ f_a = f_a$, $\forall f_a \in G$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $f_a \circ f_{-a} = f_{-a} \circ f_a = f_0$, $\forall f_a \in G$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $(G, \circ)$ este grup abelian.

(2p) **e)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ dacă $f_a \circ f_a \circ f_a = f_{15}$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $g(f_a \circ f_b) = g(f_a) + g(f_b)$, $\forall f_a, f_b \in G$.

(2p) **g)** Utilizînd eventual metoda inducției matematice, să se arate că $g\left(\underbrace{f_a \circ f_a \circ \ldots \circ f_a}_{n \text{ ori}}\right) = na$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall f_a \in G$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

(4p) **a)** Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că f' este o funcție crescătoare pe **R** şi $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - f(x))^{\frac{1}{x^2}}$.

(2p) **g)** Folosind eventual **d)**, să se arate că $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx \geq \frac{9}{10}$.