Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**093**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $\sin^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{3\pi}{4}$.

(4p) **b)** Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului cu extremitățile în punctele $A(-1,3)$ și $C(3,-1)$.

(4p) **c)** Să se determine partea reală a numărului complex $(1-3i)(3-i)$.

(4p) **d)** Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2=6x$ în punctul $A(2,2\sqrt{3})$.

(2p) **e)** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-1,3)$, $B(2,2)$ și $C(3,-1)$.

(2p) **f)** Să se calculeze lungimea laturii unui pătrat, dacă diagonala sa este $\sqrt{8}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine inversa funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+1$.

(3p) **b)** Să se calculeze $C_6^3-C_6^4+C_6^6$.

(3p) **c)** Să se dea un exemplu de număr întreg k pentru care $2<\log_4 k<3$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația $\frac{x!}{(x-1)!}=4$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^n\geq 21$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=4x^3+2x+1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{-3n+3}{4n-2}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei X.

(4p) **b)** Să se calculeze rangul matricei X.

(4p) **c)** Să se arate că matricea U este inversabilă şi $U^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(2p) **d)** Să se calculeze produsul $U\cdot A\cdot U^{-1}$.

(2p) **e)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât matricea $Y=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}$ să verifice relația

$X\cdot Y-Y\cdot X=U\cdot A\cdot U^{-1}$.

(2p) **f)** Să se verifice egalitatea $B^{-1}\cdot Z\cdot W\cdot B=\left(B^{-1}\cdot Z\cdot B\right)\cdot\left(B^{-1}\cdot W\cdot B\right)$,

$\forall B,Z,W\in\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, unde matricea B este inversabilă.

(2p) **g)** Să se arate că există matricele $P,Q\in\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, cu proprietatea $A=P\cdot Q-Q\cdot P$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln\left(x^2+e\right)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $x\in[1,\ln(e+1)]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(e+1)}\right)\geq 0$.

(2p) **c)** Utilizând eventual inegalitatea de la punctul **b)**, să se arate că, dacă $x\in[1,\ln(e+1)]$, atunci $\frac{1}{x}+\frac{x}{\ln(e+1)}\leq\frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{\ln(e+1)}\leq\frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}$, $\forall x\in[0,1]$.

(4p) **e)** Să se arate că, dacă $u,v\in\mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2\geq 4uv$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la punctul **d)**, să se arate că

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+\frac{1}{\ln(e+1)}\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}.$$

(2p) **g)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că

$$\left(\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\right)\cdot\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\leq\frac{\left(1+\ln(e+1)\right)^2}{4\ln(e+1)}.$$