EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….099**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $-4+3i$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele $A(3,-2)$ și $C(4,3)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos\pi+\cos 2\pi$.

(4p) **d)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3,-2)$ și $C(4,3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3,-2)$, $B(2,2)$ și $C(4,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{-5+6i}{-6+5i}=a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\hat{2}^{2007}$ în $\mathbf{Z}_8$.

(3p) **b)** Să se calculeze $C_7^3-C_7^4+C_7^7$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x^2=1$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x-64=0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^n<31$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^9+2x^7-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{5n^2-2n}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulţimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A+I_2=B$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei B.

(4p) **c)** Să se verifice că $A^2=A$.

(2p) **d)** Să se calculeze A^{2007}.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $B^n=I_2+(2^n-1)A$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $aA+bB+cI_2\neq C$, $\forall a,b,c\in\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că matricea $X=A^n+B^n$ este inversabilă $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^{x^2}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $x\in[1,2]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\geq 0$.

(4p) **c)** Utilizând inegalitatea de la punctul **b)**, să se arate că, dacă $x\in[1,2]$, atunci $\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\leq\frac{3}{2}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{2}\leq\frac{3}{2}$, $\forall x\in[0,1]$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $u,v\in\mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2\geq 4uv$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la punctul **d)**, să se arate că

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{3}{2}.$$

(2p) **g)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că

$$\left(\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\right)\cdot\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\leq\frac{9}{8}.$$