

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_mate-info***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 7

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (\sqrt{2} - 1)^2 < 1$ Partea întregă a numărului real $x$ este 0	3p 2p
2.	$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$	3p 2p
3.	$4^{x-2} = 4^{2x-7} \Leftrightarrow x - 2 = 2x - 7$ $x = 5$	3p 2p
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A$ este egal cu $C_{10}^3 =$ $= \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$	3p 2p
5.	$\overline{AC} = 2\overline{AB} \Leftrightarrow B$ este mijlocul segmentului $AC$ , deci $2 = \frac{1+x_C}{2}$ și $5 = \frac{3+y_C}{2}$ $x_C = 3$ și $y_C = 7$	3p 2p
6.	$\cos(\sphericalangle BAC) = \frac{1}{2}$ și $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\sphericalangle BAC)$ , deci $BC = \sqrt{7}$ $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 5 + \sqrt{7}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 3 - (-4) - 0 = 1$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = a^2 - 3$ , pentru orice număr real $a$ Pentru orice număr rațional $q$ , $\det(A(q)) \neq 0$ , deci matricea $A(q)$ este inversabilă	2p 3p
c)	Pentru orice număr rațional $p$ , $B(p) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p \\ -1 & -p & 0 \end{pmatrix}$ , $B(p)B(p) = -4 \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ p & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p^2 \end{pmatrix}$ și $B(p)B(p)B(p) = -4(p^2 + 1)B(p)$ $(1 - 4p^2)B(p) = O_3 \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}$ sau $p = \frac{1}{2}$ , care convin	3p 2p
2.a)	$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1} =$ $= \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$	3p 2p

b)	$x * \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} + 1} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x, \text{ pentru orice } x \in G$ $\frac{1}{2} * x = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} - x + 1} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x = x * \frac{1}{2}, \text{ pentru orice } x \in G \text{ și, cum } \frac{1}{2} \in G, \text{ obținem că}$ <p><math>e = \frac{1}{2}</math> este elementul neutru al legii de compoziție „*”</p>	2p  3p
c)	$f(x * y) = \frac{2xy - x - y + 1}{xy} - 1 = \frac{xy - x - y + 1}{xy} = \frac{(x-1)(y-1)}{xy} = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{y-1}{y} = f(x)f(y),$ <p>pentru orice <math>x, y \in G</math>, deci <math>f</math> este un morfism de la grupul <math>(G, *)</math> la grupul <math>(M, \cdot)</math>  <math>f</math> este continuă, <math>f</math> este strict descrescătoare pe <math>(0, 1)</math>, <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty</math> și <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0</math>,  deci <math>f</math> este bijectivă <math>\Rightarrow f</math> este un izomorfism de la grupul <math>(G, *)</math> la grupul <math>(M, \cdot)</math></p>	3p  2p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' \ln x + x \cdot (\ln x)' =$ $= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x, x \in (0, +\infty)$	2p  3p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției <math>f</math> în <math>M(m, f(m))</math> este paralelă cu dreapta de ecuație <math>y = 2x \Leftrightarrow f'(m) = 2</math>  <math>1 + \ln m = 2 \Rightarrow m = e</math>, care convine</p>	2p  3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}, f'(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \Rightarrow f \text{ strict descrescătoare pe } \left(0, \frac{1}{e}\right) \text{ și}$ $f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow f \text{ strict crescătoare pe } \left(\frac{1}{e}, +\infty\right), \text{ deci } f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right),$ <p>pentru orice <math>x \in (0, +\infty)</math>  <math>x \ln x \geq -\frac{1}{e}</math>, deci <math>x \ln x + \frac{1}{e} \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in (0, +\infty)</math></p>	3p  2p
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} =$ $= \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$	3p  2p
b)	$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \cos t dt = \sin t \Big _0^x = \sin x, \text{ pentru orice număr real } x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$	2p  3p
c)	$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^n x \leq 1 \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x (\cos x - 1) dx \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n,$ <p>pentru orice număr natural nenul <math>n</math>, deci șirul <math>(I_n)_{n \geq 1}</math> e descrescător</p> $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos^n x \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0, \text{ pentru orice număr natural nenul } n, \text{ deci șirul } (I_n)_{n \geq 1} \text{ este}$ <p>mărginit inferior, de unde obținem că șirul <math>(I_n)_{n \geq 1}</math> este convergent</p>	2p  3p