

Varianta 40

III.

13. a) $x = -14$ și $y = 15$; $x - y = -29$.

b) Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$ atunci $x = 14k - 14$ și $y = 14k + 15$. În acest caz x nu divide y deoarece x este divizibil cu 2, iar y nu este divizibil cu 2. Dacă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$ atunci $x = 14k - 1$ și $y = 14k + 28$.

Din x divide y se obține $14k - 1$ divide 29 (x divide și diferența $y - x$). Analizând cele patru cazuri obținem $n \in \{-3; 1\}$.

14. a) $a \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$ și $6 \cdot 3 + b = 0 \Rightarrow b = -18$.

b) $x = -\frac{4}{a} \in \mathbf{N}$ dacă $a \in \{-1; -2; -4\}$.

c) Fie t soluția comună. Atunci $a \cdot t + 4 = 0$ și $6 \cdot t + b = 0$ sau înmulțind prima ecuație cu 6 $\Rightarrow 6 \cdot a \cdot t + 24 = 0$ și $6 \cdot a \cdot t + a \cdot b = 0$. De aici se obține $a \cdot b = 24$.

15. b) Fie $AB = l$. Avem $BO = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ și din teorema catetei în triunghiul DOB obținem $BM = \frac{l}{3}$.

Fie $CS \perp BD$, $S \in (BD)$. Obținem $CS = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ și $SM = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul SMC , aflăm $l = 6$.

c) Volumul este $18\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

d) Fie $BO \cap AC = \{T\}$, $CT \perp DT$, $CT \perp TB$, $DT, TB \subset (BOD) \Rightarrow CT \perp (DTB)$.

Unghiul dintre dreapta MC și planul (BOD) este unghiul CMT .

În triunghiul CMT se obține valoarea sinusului $\frac{3\sqrt{7}}{14}$.