INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A IX-A

1. Un program de calculator generează un șir de numere naturale $(t_n)_{n\ge 1}$ pe care le afișează succesiv pe ecran. Primul număr afișat este $t_1 = 3$ și la fiecare pas programul generează numărul următor adăgând 1 la dublul ultimului număr afișat pe ecran.

a) Aflați care este al treilea număr afișat pe ecran.
b) Demonstrați că $t_n = 2^{n+1} - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$
c) După câți pași apare afișat pe ecran numărul 1023?
d) Arătați că t_{2015} se divide cu 3.

SOLUȚIE:

a) $t_1 = 3,\ t_2 = 2\cdot 3 + 1 = 7,\ t_3 = 2\cdot 7 + 1 = 15$
b) Demonstrăm inductiv cu $t_1 = 3$ și $t_{n+1} = 2\cdot t_n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$
c) $t_n = 1023 \Rightarrow 2^{n+1} = 1024 \Rightarrow n = 9$
d) $t_{2015} = 2^{2016} - 1 = 4^{1008} - 1 = (3+1)^{1008} - 1 = M_3 + 1 - 1 = M_3$.

BAREM:

a) $t_3 = 15$ 1p
b) $t_{n+1} = 2\cdot t_n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$ 1p
Inducție 2p
c) $n = 9$ 1p
d) $t_{2015} \vdots 3$ 2p

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne b$, cu care se formează ecuațiile $x^2 - ax + (b-1) = 0$ și $x^2 - bx + (a-1) = 0$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 + 8 \ge 4(a+b)$.
b) Demonstrați că cel puțin una din aceste ecuații are rădăcini reale.
c) Există alegeri $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care exact una din ecuațiile date să aibă rădăcini reale?

SOLUȚIE:

a) $a^2 + b^2 + 8 \ge 4(a+b) \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 \ge 0$
b) $\Delta_1 = a^2 - 4b + 4$, $\Delta_2 = b^2 - 4a + 4 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = (a-2)^2 + (b-2)^2 \ge 0 \Rightarrow$ are loc cel puțin una din situațiile $\Delta_1 \ge 0$ sau $\Delta_2 \ge 0$, deci cel puțin una din ecuații are rădăcini reale.
c) $a = 2$, $b = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$ cu rădăcini reale și $x^2 - x + 1 = 0$ care nu are rădăcini reale.

BAREM:

a) $a^2+b^2+8\geq 4(a+b) \iff (a-2)^2+(b-2)^2\geq 0$ ………………………………………………………… 2p

b) $\Delta_1=a^2-4b+4$, $\Delta_2=b^2-4a+4$ …………………………………………………………………… 1p

$\Rightarrow \Delta_1+\Delta_2=(a-2)^2+(b-2)^2\geq 0$ ………………………………………………………………… 1p

$\Rightarrow$ are loc cel puțin una din situațiile $\Delta_1\geq 0$ sau $\Delta_2\geq 0$,

deci cel puțin una din ecuații are rădăcini reale. ……………………………………………………….. 1p

c) $a=2$, $b=1 \Rightarrow x^2-2x=0$ cu rădăcini reale și $x^2-x+1=0$ care nu are rădăcini reale…………….. 2p

3. Se consideră funcția $p:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $p(t)=|6-2t|-|t-8|+2$. Aceasta reprezintă profitul anual al unei firme, exprimat în mii de lei, unde t este timpul măsurat în ani cu începere din momentul înființării firmei.

a) Calculați profitul firmei la finalul primului an, adică $p(1)$.

b) Arătați că firma nu înregistrează profit în primii patru ani.

c) Aflați după câți ani firma recuperează investiția inițială de 51 mii lei, determinând cel mai mic $t\in\mathbb{N}$ pentru care $p(1)+p(2)+...+p(t)\geq 51$.

SOLUȚIE:

a) $p(1)=-1$.

b) $p(2)=-2$, $p(3)=-3$, $p(4)=0$

c) $p(t)=\begin{cases}-t, & t\in[0;3)\\ 3t-12, & t\in[3;8)\\ t+4, & t\in[8;+\infty)\end{cases}$, $s(t)=p(1)+p(2)+...+p(t)$, $\Rightarrow s(10)=51$, $t=10$

BAREM:

a) $p(1)=-1$ ………………………………………………………………………………………….. 2p

b) $p(2)=-2$, $p(3)=-3$, $p(4)=0$ ……………………………………………………………………… 2p

c) $p(t)=\begin{cases}-t, & t\in[0;3)\\ 3t-12, & t\in[3;8)\\ t+4, & t\in[8;+\infty)\end{cases}$ ………………………………………………………………………… 1p

$s(t)=p(1)+p(2)+...+p(t)$, $\Rightarrow s(10)=51$, $t=10$ …………………………………………………… 2p

4. Pe o dreaptă d, pe care am fixat un sens dat de vectorul $\vec{u}$ de mărime 1, considerăm punctele $A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}$, nu neapărat distincte și într-o ordine arbitrară, dar astfel încât $A_0A_1=1$, $A_1A_2=2$, …, $A_9A_{10}=10$.

a) Arătați că $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=(k+1)\vec{u}$ sau $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=-(k+1)\vec{u}$, pentru orice $k\in\{0,1,2,...,9\}$

b) Verificați egalitatea $\overrightarrow{A_2A_5}=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}$.

c) Demonstrați că vectorul $\overrightarrow{A_2A_5}$ poate avea lungimea egală cu 2, 4, 6 sau 12.

d) O muscă zboară în linie dreaptă pe traseul $A_0\to A_1\to A_2\to ...\to A_{10}$. Arătați că indiferent de alegerea poziției pe dreaptă a punctelor $A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}$, la finalul traseului musca nu ajunge în A_0.

SOLUȚIE:

a) $\left|\overrightarrow{A_k A_{k+1}}\right| = (k+1) \Rightarrow$ sau $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = (k+1)\vec{u}$, sau $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = -(k+1)\vec{u}$, pentru orice $k \in \{0,1,2,...,9\}$

b) $\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \left(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}\right) + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_2A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_2A_5}$.

c) $\overrightarrow{A_2A_5} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \pm 3\vec{u} \pm 4\vec{u} \pm 5\vec{u} \Rightarrow \left|\overrightarrow{A_2A_5}\right| \in \left|\pm 3 \pm 4 \pm 5\right| = \{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$

d) $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 10 =$ rezultat impar, deci la final musca nu poate ajunge în A_0.

BAREM:

a) $\left|\overrightarrow{A_k A_{k+1}}\right| = (k+1) \Rightarrow$ sau $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = (k+1)\vec{u}$ 1p

sau $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = -(k+1)\vec{u}$, pentru orice $k \in \{0,1,2,...,9\}$ 1p

b) $\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \left(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}\right) + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_2A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_2A_5}$ 1p

c) $\overrightarrow{A_2A_5} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \pm 3\vec{u} \pm 4\vec{u} \pm 5\vec{u}$ 1p

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{A_2A_5}\right| \in \left|\pm 3 \pm 4 \pm 5\right| = \{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 1p

d) $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 10 =$ 1p

= rezultat impar, deci la final musca nu poate ajunge în A_0. .... 1p