INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A X-A

1. În acestă problemă, primele două cerințe, aparent fără legătură, ajută la rezolvarea celei de-a treia.
   a) Arătați că $1<\log_2 3<2$
   b) Demonstrați inegalitatea $\frac{x+2}{3x}<\frac{2}{x+1}$, pentru orice $x\in(1;\,2)$
   c) Comparați numărul $a=\log_{27}12$ cu numărul $b=\log_6 4$.

SOLUȚIE:

a) $1<\log_2 3<2 \;\Leftrightarrow\; \log_2 2<\log_2 3<\log_2 4 \;\Leftrightarrow\; 2<3<4$

b) $\frac{x+2}{3x}<\frac{2}{x+1} \;\Leftrightarrow\; x^2-3x+2<0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x-2)<0$ care are loc pentru orice $x\in(1;\,2)$

c) $a=\log_{27}12=\frac{\log_2 12}{\log_2 27}=\frac{\log_2 3+2}{3\log_2 3}\overset{not}{=}\frac{x+2}{3x}$, $b=\log_6 4=\frac{\log_2 4}{\log_2 6}=\frac{2}{1+\log_2 3}\overset{not}{=}\frac{2}{1+x}$, cu $\log_2 3\overset{not}{=}x\in(1;\,2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ conform punctului anterior $a<b$

BAREM:

a) $1<\log_2 3<2 \;\Leftrightarrow\; \log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$ 1p

$\Leftrightarrow\; 2<3<4$ 1p

b) $\frac{x+2}{3x}<\frac{2}{x+1} \;\Leftrightarrow\; x^2-3x+2<0$ 1p

$\Leftrightarrow\; (x-1)(x-2)<0$ care are loc pentru orice $x\in(1;\,2)$ 1p

c) $a=\log_{27}12=\frac{\log_2 12}{\log_2 27}=\frac{\log_2 3+2}{3\log_2 3}\overset{not}{=}\frac{x+2}{3x}$ 1p

$b=\log_6 4=\frac{\log_2 4}{\log_2 6}=\frac{2}{1+\log_2 3}\overset{not}{=}\frac{2}{1+x}$ 1p

cu $\log_2 3\overset{not}{=}x\in(1;\,2)$ $\Rightarrow$ conform punctului anterior $a<b$ 1p

2. Considerăm numărul complex $z = 1 - i\sqrt{3}$.

   a) Arătați că numărul $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}$ este real.

   b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $z^2 = az + b$.

   c) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $z^n = a_n z + b_n$.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = 1 \in \mathbb{R}$

b) $z^2 = az + b \Leftrightarrow \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 = a\left(1 - i\sqrt{3}\right) + b \Leftrightarrow -2 - 2i\sqrt{3} = (a + b) - ai\sqrt{3} \Rightarrow a = 2,\ b = -4$

c) Inducție, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $z^k = a_k z + b_k \Rightarrow$

$\Rightarrow z^{k+1} = a_k z^2 + b_k z = a_k (2z - 4) + b_k z = (2a_k + b_k) z - 4a_k = a_{k+1} z + b_{k+1}$,

unde $a_{k+1} = 2a_k + b_k \in \mathbb{R}$, $b_{k+1} = -4a_k \in \mathbb{R}$

<u>BAREM</u>:

a) $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{1 - i\sqrt{3}}$ 1p

$= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = 1 \in \mathbb{R}$ 1p

b) $z^2 = az + b \Leftrightarrow \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 = a\left(1 - i\sqrt{3}\right) + b \Leftrightarrow -2 - 2i\sqrt{3} = (a + b) - ai\sqrt{3}$ 1p

$\Rightarrow a = 2,\ b = -4$ 1p

c) Inducție, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ 1p

$z^k = a_k z + b_k \Rightarrow$

$\Rightarrow z^{k+1} = a_k z^2 + b_k z = a_k (2z - 4) + b_k z = (2a_k + b_k) z - 4a_k = a_{k+1} z + b_{k+1}$, $a_{k+1} \in \mathbb{R}$, $b_{k+1} \in \mathbb{R}$ 2p

3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{2-x}$.

   a) Arătați că $f(x_1) - f(x_2) = \left(2^{x_1} - 2^{x_2}\right) \cdot \left(1 - 2^{2 - x_1 - x_2}\right)$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

   b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe $(-\infty; 1]$ și crescătoare pe $[1; +\infty)$.

   c) Arătați că $f(x) + f\left(x^2\right) \geq 12{,}5$, pentru orice $(-\infty; -1]$.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $\left(2^{x_1} - 2^{x_2}\right) \cdot \left(1 - 2^{2 - x_1 - x_2}\right) = \ldots = f(x_1) - f(x_2)$

b) Dacă $x_1 < x_2 \leq 1 \Rightarrow 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$ și $1 - 2^{2 - x_1 - x_2} \leq 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \geq 0 \Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty; 1]$.

Dacă $1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$ și $1 - 2^{2 - x_1 - x_2} \geq 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow f$ crescătoare pe $[1; +\infty)$.

c) f descrescătoare pe $(-\infty; -1] \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = 8{,}5$

$x \in (-\infty; -1] \Rightarrow x^2 \in [1; +\infty)$, f crescătoare pe $[1; +\infty) \Rightarrow f\left(x^2\right) \geq f(1) = 4$

$\Rightarrow f(x) + f\left(x^2\right) \geq 12{,}5$

BAREM:

a) $\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\cdot\left(1-2^{2-x_1-x_2}\right)=...=f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$ 2p

b) Dacă $x_1 < x_2 \le 1 \Rightarrow 2^{x_1}-2^{x_2} < 0$ și $1-2^{2-x_1-x_2} \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right) \ge 0 \Rightarrow f$ descrescătoare pe $\left(-\infty; 1\right]$. 1p

Dacă $1 \le x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1}-2^{x_2} < 0$ și $1-2^{2-x_1-x_2} \ge 0 \Rightarrow$

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right) \le 0 \Rightarrow f$ crescătoare pe $\left[1; +\infty\right)$. 1p

c) f descrescătoare pe $\left(-\infty; -1\right] \Rightarrow f\left(x\right) \ge f\left(-1\right)=8{,}5$ 1p

$x \in \left(-\infty; -1\right] \Rightarrow x^2 \in \left[1; +\infty\right)$, f crescătoare pe $\left[1; +\infty\right) \Rightarrow f\left(x^2\right) \ge f\left(1\right)=4$ 1p

$\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(x^2\right) \ge 12{,}5$ 1p

4. O mulțime de numere naturale o vom numi *specială* dacă are cel puțin trei elemente și suma oricăror două elemente ale ei se divide cu 6.
   a) Arătați că mulțimea $\{12, 18, 24\}$ este specială.
   b) Dați exemplu de o mulțime specială cu patru elemente și care să conțină elementul 3.
   c) Fie $A \subset \{1, 2, 3, ..., 100\}$ o mulțime specială.
   c_1 : Arătați că elementele mulțimii A fie sunt toate divizibile cu 6, fie la împărțirea cu 6 dau toate restul 3
   c_2 : Aflați care este numărul maxim de elemente al mulțimii A

SOLUȚIE:

a) $30=6\cdot 5 \Rightarrow 30 ⋮ 6$, $36=6\cdot 6 \Rightarrow 36 ⋮ 6$, $42=6\cdot 7 \Rightarrow 42 ⋮ 6$, deci $\{12, 18, 24\}$ este specială

b) spre exemplu $\{3, 9, 15, 21\}$ este specială

c) c_1 : Dacă $a, b \in A$, $x \in A \Rightarrow a-b=\left(a+x\right)-\left(b+x\right) ⋮ 6$

Din $a+b=M_6$ și $a-b=M_6 \Rightarrow 2a=M_6 \Rightarrow$ sau $a=M_6$ sau $a=M_6+3$

c_2 : Conform cu c_1, sau $A=\{3, 9, 15, ..., 99\}$ sau $A=\{6, 12, 18, ..., 96\}$

și numărul maxim de elemente este 17, atunci când $A=\{3, 9, 15, ..., 99\}$

BAREM:

a) $30=6\cdot 5 \Rightarrow 30 ⋮ 6$, $36=6\cdot 6 \Rightarrow 36 ⋮ 6$, $42=6\cdot 7 \Rightarrow 42 ⋮ 6$, deci $\{12, 18, 24\}$ este specială 1p

b) spre exemplu $\{3, 9, 15, 21\}$ este specială 2p

c) c_1 : Dacă $a, b \in A$, $x \in A \Rightarrow a-b=\left(a+x\right)-\left(b+x\right) ⋮ 6$ 1p

Din $a+b=M_6$ și $a-b=M_6 \Rightarrow 2a=M_6 \Rightarrow$ sau $a=M_6$ sau $a=M_6+3$ 2p

c_2 : Conform cu c_1, sau $A=\{3, 9, 15, ..., 99\}$ sau $A=\{6, 12, 18, ..., 96\}$

și numărul maxim de elemente este 17, atunci când $A=\{3, 9, 15, ..., 99\}$ 1p