CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A X-A

1. În această problemă, primele două cerințe, aparent fără legătură, ajută la rezolvarea celei de-a treia.
   a) Arătați că $1<\log_2 3<2$
   b) Demonstrați inegalitatea $\frac{x+2}{3x}<\frac{2}{x+1}$, pentru orice $x\in(1;\,2)$
   c) Comparați numărul $a=\log_{27}12$ cu numărul $b=\log_6 4$.

2. Considerăm numărul complex $z=1-i\sqrt{3}$.
   a) Arătați că numărul $\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}$ este real.
   b) Determinați $a,\,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $z^2=az+b$.
   c) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ există $a_n,\,b_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $z^n=a_n z+b_n$.

3. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+2^{2-x}$.
   a) Arătați că $f(x_1)-f(x_2)=\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\cdot\left(1-2^{2-x_1-x_2}\right)$, oricare ar fi $x_1,\,x_2\in\mathbb{R}$.
   b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe $(-\infty;\,1]$ și crescătoare pe $[1;\,+\infty)$.
   c) Arătați că $f(x)+f\left(x^2\right)\geq 12{,}5$, pentru orice $x\in(-\infty;-1]$.

4. O mulțime o vom numi *specială* dacă are cel puțin trei elemente și suma oricăror două elemente ale ei se divide cu 6.
   a) Arătați că mulțimea $A=\{12,\,18,\,24\}$ este specială.
   b) Dați exemplu de o mulțime specială cu patru elemente și care să conțină elementul 3.
   c) Fie $A\subset\{1,\,2,\,3,\,...,100\}$ o mulțime specială.
      c_1 : Arătați că elementele mulțimii A fie sunt toate divizibile cu 6, fie la împărțirea cu 6 dau toate restul 3
      c_2 : Aflați care este numărul maxim de elemente al mulțimii A

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*